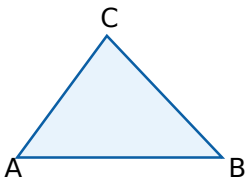
Apuntes - Rectas, ángulos y triángulos

Curso: 1 Eso

La geometría empieza con puntos, rectas y ángulos. Con ellos se construyen los triángulos, las figuras más sencillas y más usadas.

Actividad de introducción: el tejado y la escalera

Un albañil de un pueblo de Cuenca quiere reparar un tejado. Apoya una escalera en la pared formando un ángulo con el suelo: si la escalera está muy inclinada, es peligroso; si el ángulo es el adecuado, es seguro. El tejado tiene forma triangular y los carpinteros necesitan saber cuánto miden los ángulos de las vigas para cortarlas con precisión. Y en el reloj de la plaza, las agujas forman ángulos distintos a cada hora. En este tema aprenderás a clasificar y medir ángulos, a conocer las posiciones de las rectas y a calcular elementos de un triángulo.



Puntos, rectas y segmentos

Definición: recta, semirrecta y segmento

Una **recta** es una línea sin principio ni fin determinada por dos puntos. Una **semirrecta** tiene un origen y no tiene final. Un **segmento** es la parte de recta entre dos puntos. Dos rectas en el plano son **paralelas** si no se cortan y **secantes** si se cortan en un punto; si forman ángulo recto son **perpendiculares**.

Ángulos

Definición: ángulo

Un **ángulo** es la región del plano limitada por dos semirrectas con el mismo origen (**vértice**). Se mide en grados. Es **agudo** si mide menos de 90°, **recto** si mide 90°, **obtuso** entre 90° y 180°, **llano** si mide 180° y **completo** si mide 360°.

Propiedad

Dos ángulos son **complementarios** si suman 90° y **suplementarios** si suman 180°. Los ángulos **opuestos por el vértice** son iguales.

El sistema sexagesimal

Regla: ángulos en grados, minutos y segundos

$1^\circ = 60'$ (minutos) y $1' = 60''$ (segundos). Para sumar ángulos se suman por separado grados, minutos y segundos y se pasan los excesos de 60 a la unidad superior.

Ejemplo 1

Calcula $35^\circ 40' + 27^\circ 35'$.

Grados: $35 + 27 = 62$. Minutos: $40 + 35 = 75$. Como $75' = 1^\circ 15'$, el resultado es $63^\circ 15'$.

Ángulos entre paralelas y una secante

Propiedad

Cuando una secante corta a dos paralelas aparecen ángulos iguales: los **correspondientes**, los **alternos internos** y los **alternos externos**. Los ángulos internos del mismo lado suman 180°.

Triángulos

Definición: triángulo

Un **triángulo** es un polígono de tres lados. Por sus lados es **equilátero** (tres iguales), **isósceles** (dos iguales) o **escaleno** (ninguno igual). Por sus ángulos es **acutángulo**, **rectángulo** (un ángulo de 90°) u **obtusángulo**.

Teorema

Los tres ángulos de un triángulo suman siempre 180°. Además, cada lado es menor que la suma de los otros dos (**desigualdad triangular**).

Ejemplo 2

Un triángulo tiene ángulos de 50° y 65°. ¿Cuánto mide el tercero?

$180 - 50 - 65 = 65^\circ$. Como dos ángulos son iguales, es isósceles y acutángulo.

Ejemplo 3

¿Existe un triángulo de lados 3, 4 y 8 cm?

No: $3 + 4 = 7$, no cumple la desigualdad triangular.

Ejemplo 4

En un triángulo isósceles el ángulo desigual mide 40°. ¿Cuánto miden los otros dos?

Suman $180 - 40 = 140^\circ$ y son iguales: 70° cada uno.

¡Atención!

Los ángulos se suman en base 60, no en base 10: $40' + 35'$ no es 75°. Y un triángulo no puede tener dos ángulos rectos u obtusos.

Ángulos entre rectas y propiedades del triángulo

Regla: ángulos entre paralelas

Si dos rectas paralelas son cortadas por una secante, los ángulos **correspondientes** son iguales, los **alternos internos** son iguales y los **alternos externos** son iguales. Los ángulos **opuestos por el vértice** también son iguales y los ángulos **adyacentes** son suplementarios (suman 180°).

Ejemplo 6

Dos paralelas son cortadas por una secante y uno de los ángulos mide 70°. ¿Cuánto mide su ángulo adyacente y el alterno interno?

El adyacente es suplementario: 180° − 70° = 110°. El alterno interno es igual: 70°.

Regla: desigualdad triangular y Pitágoras

En todo triángulo, cada lado es menor que la suma de los otros dos. Si el triángulo es rectángulo, el cuadrado de la hipotenusa es igual a la suma de los cuadrados de los catetos: $a^2 = b^2 + c^2$. Por ejemplo, un triángulo de catetos 3 y 4 tiene hipotenusa 5.

Ejemplo 7

Calcula la hipotenusa de un triángulo rectángulo de catetos 5 y 12.

h² = 25 + 144 = 169, luego h = 13. Es una terna pitagórica.

Clasificación de triángulos y operaciones con ángulos

Propiedad: clasificar un triángulo

Según sus lados, un triángulo es **equilátero** (tres lados iguales), **isósceles** (dos lados iguales) o **escaleno** (tres lados distintos). Según sus ángulos, es **acutángulo** (tres

ángulos agudos), **rectángulo** (un ángulo recto) u **obtusángulo** (un ángulo obtuso). Un triángulo no puede tener más de un ángulo recto u obtuso.

Ejemplo 8

Resta 90° − 34° 20' 15''.

Convertimos: 90° = 89° 59' 60''. Entonces 89° 59' 60'' − 34° 20' 15'' = 55° 39' 45''. Comprobación: 55° 39' 45'' + 34° 20' 15'' = 89° 59' 60'' = 90°.

Ejemplo 9

Un triángulo tiene ángulos x, 2x y 3x. Calcula cada ángulo.

La suma es 180°: x + 2x + 3x = 6x = 180°, luego x = 30°. Los ángulos miden 30°, 60° y 90°: es un triángulo rectángulo.

Método: calcular un ángulo desconocido

1. Identifica qué relación liga el ángulo con los datos: suma de 180° en el triángulo, 90° en un recto, 180° en dos adyacentes, igualdad entre paralelas.
2. Plantea una ecuación con la incógnita.
3. Resuelve y comprueba que el resultado es razonable.

¡Atención! Errores frecuentes

- Pensar que los ángulos adyacentes son iguales: suman 180°.
- Sumar grados y minutos sin reagrupar: 25° 40' + 18° 35' es 44° 15', no 43° 75'.
- Olvidar la desigualdad triangular al construir triángulos.
- Aplicar Pitágoras a triángulos que no son rectángulos.

¿Sabías que...?

El sistema sexagesimal que usamos para los ángulos y las horas viene de los antiguos babilonios, que contaban de 60 en 60 hace más de 4 000 años. Es muy cómodo porque 60 tiene muchos divisores: 2, 3, 4, 5, 6, 10, 12, 15, 20 y 30. Por eso una hora tiene 60 minutos y una circunferencia completa se divide en 360 grados.

Rectas y puntos notables del triángulo

En todo triángulo se pueden trazar cuatro tipos de rectas especiales: mediatrices, bisectrices, alturas y medianas. Cada tipo se corta en un único punto, llamado punto notable. Estos puntos tienen aplicaciones muy prácticas, por ejemplo para encontrar el lugar que está a la misma distancia de tres pueblos o el punto de equilibrio de una pieza triangular.

Definición: rectas notables de un triángulo

La **mediatriz** de un lado es la perpendicular que pasa por su punto medio; las tres se cortan en el **circuncentro**, centro de la circunferencia que pasa por los tres vértices. La **bisectriz** de un ángulo lo divide en dos ángulos iguales; las tres se cortan en el **incentro**, centro de la circunferencia que toca los tres lados. La **altura** es la perpendicular desde un vértice al lado opuesto; las tres se cortan en el **ortocentro**. La **mediana** une un vértice con el punto medio del lado opuesto; las tres se cortan en el **baricentro**, el centro de gravedad.

Ejemplo 10

Tres pueblos, A, B y C, quieren construir un depósito de agua que esté a la misma distancia de los tres. ¿Dónde deben colocarlo?

Los puntos que están a igual distancia de A y de B forman la mediatriz del segmento AB. Del mismo modo, los puntos a igual distancia de B y C forman la mediatriz de BC. El punto donde se cortan ambas mediatrices está a la misma distancia de A, de B y de C: es el circuncentro del triángulo ABC. Allí deben construir el depósito. Si se traza la circunferencia con centro en ese punto y radio hasta A, pasará también por B y por C.

Ejemplo 11

En un triángulo, el ángulo exterior en el vértice C mide 125° y el ángulo interior en A mide 70°. Calcula los ángulos interiores en B y en C.

El ángulo interior en C y su exterior forman un ángulo llano: $\hat{C} = 180^\circ - 125^\circ = 55^\circ$.

Como los tres ángulos suman 180°, $\hat{B} = 180^\circ - 70^\circ - 55^\circ = 55^\circ$. Observa que el ángulo exterior en C, 125°, es igual a la suma de los dos interiores no adyacentes: $70^\circ + 55^\circ = 125^\circ$. Esto se cumple en todos los triángulos.

¡Atención! La altura puede quedar fuera del triángulo

En un triángulo obtusángulo, dos de las alturas caen fuera del triángulo: hay que prolongar el lado opuesto para trazar la perpendicular. Por eso su ortocentro también está fuera. En un triángulo rectángulo, dos alturas coinciden con los catetos y el ortocentro es el vértice del ángulo recto.

El consejo de Otto

Haz un dibujo siempre, aunque sea a mano alzada, y escribe sobre él los datos. Si hay paralelas, busca los ángulos iguales con la letra Z (alternos) o F (correspondientes).