Apuntes - Proporcionalidad y porcentajes

Curso: 1 Eso

La proporcionalidad aparece cuando dos cantidades varían a la vez: el precio y los kilos, la velocidad y el tiempo. Los porcentajes son su aplicación más cotidiana.

Actividad de introducción: las rebajas y la receta

En una tienda de Málaga, una camiseta de 24 € lleva un cartel: «30 % de descuento». ¿Cuánto cuesta ahora? Calculas el 30 % de 24, que son 7,20 €, y restas: pagas 16,80 €. En casa, la receta de una tarta para 4 personas lleva 200 g de azúcar; para 10 personas necesitas 500 g, porque las cantidades crecen en la misma proporción. Pero si 3 obreros hacen una obra en 20 días, 6 obreros la harán en 10: al duplicar los obreros, los días se reducen a la mitad. Proporciones y porcentajes están en las compras, la cocina, el trabajo y los mapas.

Razón y proporción

Definición: razón

La **razón** entre dos cantidades a y b es el cociente $\frac{a}{b}$. Una **proporción** es la igualdad de dos razones: $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$.

Propiedad

En toda proporción el producto de los extremos es igual al de los medios: $a \cdot d = b \cdot c$. Gracias a ello se halla un término desconocido: si $\frac{3}{5} = \frac{x}{20}$, entonces $x = \frac{3 \cdot 20}{5} = 12$.

Magnitudes directa e inversamente proporcionales

Definición: proporcionalidad directa

Dos magnitudes son **directamente proporcionales** si al multiplicar una por un número la otra queda multiplicada por el mismo número. El cociente $\frac{y}{x} = k$ es constante y se llama **constante de proporcionalidad**.

Definición: proporcionalidad inversa

Son **inversamente proporcionales** si al multiplicar una por un número la otra queda dividida por ese número. El producto $x \cdot y = k$ es constante.

Observación

No toda relación creciente es proporcional. La edad y la altura de una persona aumentan juntas, pero no son proporcionales.

Regla de tres simple

Método: resolver una regla de tres simple

1. Decide si la relación es directa o inversa.
2. Ordena los datos en dos filas y marca la incógnita x.
3. Si es directa: $x = \frac{\text{dato} \cdot \text{dato}}{\text{dato}}$ en cruz. Si es inversa: se multiplican los datos de la misma fila y se divide entre el tercero.
4. Comprueba que el resultado tiene sentido.

Ejemplo 1

Si 5 kg de naranjas cuestan 7,50 €, ¿cuánto cuestan 8 kg?

Es directa (más kilos, más dinero): $x = \frac{8 \cdot 7{,}50}{5} = 12$ €.

Ejemplo 2

Tres albañiles hacen un muro en 12 días. ¿Cuánto tardarían 4 albañiles al mismo ritmo?

Es inversa (más obreros, menos días): $x = \frac{3 \cdot 12}{4} = 9$ días.

Porcentajes

Definición: porcentaje

Un **porcentaje** $p\,\%$ es una razón de denominador 100: $p\,\% = \frac{p}{100}$. Calcular el $p\,\%$ de una cantidad es multiplicarla por $\frac{p}{100}$.

Ejemplo 3

Calcula el 15 % de 240 y qué porcentaje es 18 de 72.

$240 \cdot 0{,}15 = 36$. Y $\frac{18}{72} = 0{,}25 = 25\,\%$.

Aumentos y descuentos porcentuales

Regla: aumento y descuento

Para aumentar una cantidad un $p\,\%$ se multiplica por $1 + \frac{p}{100}$. Para disminuirla un $p\,\%$ se multiplica por $1 - \frac{p}{100}$.

Ejemplo 4

Unas zapatillas cuestan 80 € y tienen un 20 % de descuento. ¿Cuánto hay que pagar?

Factor $1 - 0{,}20 = 0{,}80$: $80 \cdot 0{,}80 = 64$ €.

Ejemplo 5

Un móvil cuesta 250 € más un 21 % de IVA. ¿Precio final?

Factor $1{,}21$: $250 \cdot 1{,}21 = 302{,}50$ €.

¡Atención!

Subir un 20 % y bajar un 20 % no devuelve el valor inicial: $100 \cdot 1{,}2 \cdot 0{,}8 = 96$. Cada porcentaje se aplica sobre una cantidad distinta.

¡Atención!

En una regla de tres, identifica antes si la relación es directa o inversa; es el error más frecuente.

Repartos proporcionales y variaciones sucesivas

Método: reparto proporcional

1. Suma las partes (o las cantidades) que determinan el reparto.
2. Divide la cantidad total entre esa suma para obtener el valor de una parte.
3. Multiplica ese valor por la parte de cada uno.
4. Comprueba que la suma de lo repartido es el total.

Ejemplo 6

Dos hermanos reciben 90 € de paga. Se reparten en proporción 2 : 3. ¿Cuánto recibe cada uno?

Partes: 2 + 3 = 5. Cada parte vale 90 : 5 = 18 €. Uno recibe 2 · 18 = 36 € y el otro 3 ·

18 = 54 €.

Ejemplo 7

Una camiseta de 40 € sube un 10 % y luego baja un 10 %. ¿Cuánto cuesta al final?

Sube: 40 · 1,10 = 44 €. Baja: 44 · 0,90 = 39,60 €. No vuelve a 40 € porque el segundo 10 % se aplica sobre una cantidad mayor.

Regla: índice de variación

Para aumentar una cantidad un p %, se multiplica por $1 + \frac{p}{100}$. Para disminuirla un p %, se multiplica por $1 - \frac{p}{100}$. Un aumento del 20 % es multiplicar por 1,20 y un descuento del 15 % es multiplicar por 0,85. Si hay varias variaciones seguidas, se multiplican los índices.

Regla: proporcionalidad directa e inversa

Dos magnitudes son **directamente proporcionales** si al multiplicar una por un número, la otra queda multiplicada por el mismo número; su cociente es constante. Son **inversamente proporcionales** si al multiplicar una por un número, la otra queda dividida por él; su producto es constante.

Ejemplo 8

Con 6 grifos se llena una piscina en 10 horas. ¿Cuánto tardarán 4 grifos iguales?

Más grifos, menos tiempo: es proporcionalidad inversa. 6 · 10 = 4 · x, de donde x = 15 horas.

Ejemplo 9

En un instituto de 500 alumnos, 320 van en autobús. ¿Qué porcentaje es? Si el curso que viene el número de alumnos aumenta un 8 %, ¿cuántos alumnos habrá?

320 : 500 = 0,64, es decir, el 64 %. Con el aumento: 500 · 1,08 = 540 alumnos. Si se mantiene el porcentaje de autobús, irán 540 · 0,64 = 345,6, es decir, unos 346 alumnos.

¡Atención! Errores frecuentes

- Aplicar una regla de tres directa cuando es inversa, y al revés.
- Sumar porcentajes de variaciones sucesivas: subir un 20 % y bajar un 20 % no

devuelve el precio inicial.
- Calcular el descuento y olvidarse de restarlo del precio.
- Confundir «el 20 % de» con «aumentar un 20 %».

¿Sabías que...?

La palabra «porcentaje» viene de «por cada ciento». Los antiguos romanos ya calculaban impuestos del 1 % sobre las ventas. Hoy el IVA, los descuentos, los intereses del banco y las encuestas se expresan en tanto por ciento. Y en los mapas, la escala 1 : 50 000 indica que 1 cm del mapa corresponde a 500 m de la realidad.

Escalas, reducción a la unidad y tablas de proporcionalidad

La regla de tres no es la única forma de resolver problemas de proporcionalidad. Muchas veces es más claro y más seguro calcular primero el valor que corresponde a una unidad, por ejemplo el precio de un kilo o lo que tarda un solo obrero, y después multiplicar o dividir. Además, los mapas y los planos son un ejemplo muy importante de proporcionalidad directa: las escalas.

Método: reducción a la unidad

1. Decide si la proporcionalidad es directa o inversa.
2. Calcula el valor para una unidad: en la directa se divide; en la inversa se multiplica.
3. Calcula el valor pedido: en la directa se multiplica por el nuevo número de unidades; en la inversa se divide.
4. Comprueba que el resultado tiene sentido: más cantidad, más precio; más obreros, menos días.

Ejemplo 10

Por 3 kg de cerezas se pagan 13,50 €. ¿Cuánto se paga por 7 kg?

Es una proporcionalidad directa: a doble peso, doble precio. Un kilo cuesta $13{,}50 : 3 = 4{,}50$ €. Siete kilos cuestan $7 \cdot 4{,}50 = 31{,}50$ €. Con la regla de tres obtendríamos lo mismo: $x = \dfrac{7 \cdot 13{,}50}{3} = 31{,}50$ €.

Definición: escala

La **escala** de un mapa o de un plano es la razón entre una longitud en el dibujo y la longitud real correspondiente, medidas en la misma unidad. La escala $1 : 50\,000$ significa que 1 cm del mapa equivale a 50 000 cm de la realidad, es decir, a 500 m.

Ejemplo 11

En un mapa a escala 1 : 50 000, dos pueblos están separados 6,4 cm. ¿Cuál es la distancia real?

Multiplicamos por el número de la escala: $6{,}4 \cdot 50\,000 = 320\,000$ cm. Pasamos a kilómetros dividiendo entre 100 000: $320\,000$ cm $= 3{,}2$ km. Al revés, si dos lugares están a 8 km, en el mapa estarán a $800\,000 : 50\,000 = 16$ cm.

¡Atención! No todo es proporcional

Antes de aplicar una regla de tres, comprueba que la relación es de verdad proporcional. Un taxi con bajada de bandera, una tarifa de móvil con cuota fija o la edad y la altura de una persona no son magnitudes proporcionales: si recorres el doble de kilómetros en taxi, no pagas el doble, porque hay una parte fija.

¿Sabías que...? El IVA de cada producto

En España no todos los productos pagan el mismo IVA. El tipo general es del 21 %, pero el pan, la leche, las frutas o los libros tienen un tipo superreducido del 4 %, y otros alimentos o el transporte de viajeros, uno reducido del 10 %.

El consejo de Otto

Para calcular el 10 % de una cantidad, mueve la coma una posición a la izquierda. A partir de ahí, el 5 % es la mitad y el 20 % el doble.