Apuntes - Probabilidad

Curso: 1 Eso

La probabilidad mide lo posible que es que ocurra un suceso aleatorio. Va de 0 (imposible) a 1 (seguro).

Actividad de introducción: ¿llover o no llover?

Antes de salir de excursión, el profesor mira la previsión del tiempo: «probabilidad de lluvia, 30 %». ¿Qué significa? Que de cada 100 días con condiciones parecidas, en unos 30 llueve. Lucía, en cambio, lanza una moneda para decidir quién saca primero en el recreo: cara o cruz, 50 % de probabilidad cada una. Aunque no sepamos qué va a pasar en un experimento aleatorio, podemos medir cuántas posibilidades tiene cada resultado. Eso es la probabilidad: un número entre 0 y 1 que mide lo probable que es un suceso.

Experimentos deterministas y aleatorios

Definición: experimento aleatorio

Un experimento es **determinista** si su resultado se puede prever (calentar agua a 100 °C la hace hervir). Es **aleatorio** si, repetido en las mismas condiciones, no se puede predecir el resultado: lanzar un dado o una moneda.

Espacio muestral y sucesos

Definición: espacio muestral y suceso

El **espacio muestral** E es el conjunto de todos los resultados posibles. Un **suceso** es un subconjunto de E. Es **seguro** si ocurre siempre, **imposible** si nunca, y **elemental** si tiene un único resultado.

Ejemplo 1

Escribe el espacio muestral al lanzar un dado y el suceso «sacar par».

$E = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$. El suceso es $\{2, 4, 6\}$.

Frecuencia relativa y probabilidad

Propiedad

Si repetimos un experimento muchas veces, la **frecuencia relativa** de un suceso se acerca a un valor fijo, que es su **probabilidad** (ley de los grandes números). Toda

probabilidad cumple $0 \leq P \leq 1$.

Ejemplo 2

Al lanzar 200 veces una chincheta, cae con la punta hacia arriba 74 veces. Estima la probabilidad.

$\frac{74}{200} = 0{,}37$, un 37 %.

Regla de Laplace

Regla de Laplace

Si todos los resultados son **equiprobables**: $P(A) = \frac{\text{casos favorables}}{\text{casos posibles}}$.

Ejemplo 3

Se extrae una bola de una bolsa con 3 rojas, 5 azules y 2 verdes. Calcula $P(\text{azul})$ y $P(\text{no roja})$.

Casos posibles: 10. $P(\text{azul}) = \frac{5}{10} = \frac{1}{2}$. $P(\text{no roja}) = \frac{7}{10}$.

Propiedad: suceso contrario

La probabilidad del suceso contrario es $P(\bar{A}) = 1 - P(A)$. La suma de las probabilidades de todos los resultados elementales es 1.

Cómo contar los casos

Método: contar casos en experimentos de dos pasos

1. Haz una tabla de doble entrada o un diagrama de árbol.
2. Cuenta el total de resultados.
3. Cuenta los favorables y aplica Laplace.

Ejemplo 4

Se lanzan dos dados. ¿Cuál es la probabilidad de que sumen 7?

Hay $6 \cdot 6 = 36$ casos. Suman 7: (1,6), (2,5), (3,4), (4,3), (5,2), (6,1), es decir 6.

$P = \frac{6}{36} = \frac{1}{6}$.

Ejemplo 5

Se lanzan dos monedas. Calcula la probabilidad de salir una cara y una cruz.

$E = \{CC, C+, +C, ++\}$, 4 casos. Favorables: 2. $P = \frac{1}{2}$.

¡Atención!

La regla de Laplace solo vale si los resultados son equiprobables. Con dos dados, la suma 7 no tiene la misma probabilidad que la suma 2. Y una moneda no tiene memoria: tras cinco caras, la probabilidad de cara sigue siendo $\frac{1}{2}$.

Probabilidad y combinaciones

Regla: propiedades de la probabilidad

La probabilidad de cualquier suceso está entre 0 y 1: el suceso imposible tiene probabilidad 0 y el suceso seguro tiene probabilidad 1. La suma de las probabilidades de todos los resultados elementales es 1. La probabilidad del suceso contrario es $P(\text{no } A) = 1 - P(A)$.

Ejemplo 6

En una bolsa hay 4 bolas negras y 6 blancas. ¿Cuál es la probabilidad de sacar una que no sea negra?

P(negra) = 4/10 = 2/5. La probabilidad de no negra es 1 − 2/5 = 3/5 = 0,6, que coincide con 6/10 (las blancas).

Método: contar casos con un diagrama de árbol

1. Dibuja una rama por cada resultado de la primera acción.
2. De cada rama, dibuja las ramas de la segunda acción.
3. Cuenta los caminos: es el número de casos posibles.
4. Cuenta los caminos favorables y aplica la regla de Laplace.

Ejemplo 7

Se lanza una moneda y se saca una bola de una bolsa con una bola roja y una azul. ¿Cuántos resultados hay y cuál es P(cara y roja)?

Hay 2 resultados con la moneda y 2 con la bola: 2 · 2 = 4 resultados (C-roja, C-azul, X-roja, X-azul). P(cara y roja) = 1/4.

Ejemplo 8

En una clase de 30 alumnos, 12 tienen perro, 9 tienen gato y 3 tienen los dos. ¿Qué probabilidad hay de que un alumno elegido al azar tenga perro o gato?

Con perro o gato: $12 + 9 - 3 = 18$ alumnos (hay que restar los que tienen los dos para no contarlos dos veces). $P = 18/30 = 3/5 = 0{,}6$.

Ejemplo 9

Una ruleta tiene 10 sectores iguales numerados del 1 al 10. Calcula P(número primo) y P(múltiplo de 3).

Primos: 2, 3, 5 y 7, luego $P = 4/10 = 2/5$. Múltiplos de 3: 3, 6 y 9, luego $P = 3/10$. Ambas probabilidades están entre 0 y 1, como debe ser.

Ejemplo 10

Un jugador lanza un dado 120 veces y el 6 sale 26 veces. Compara la frecuencia relativa con la probabilidad teórica.

Frecuencia relativa $= 26/120 = 0{,}217$. Probabilidad teórica $= 1/6 = 0{,}167$. La diferencia es 0,05: con 120 lanzamientos es normal que no coincidan exactamente.

Propiedad: frecuencia relativa y probabilidad

La **frecuencia relativa** de un suceso es el número de veces que ocurre dividido entre el número de veces que se repite el experimento. Cuando el número de repeticiones es muy grande, la frecuencia relativa se aproxima a la probabilidad. Por eso los casinos y las aseguradoras ganan siempre a la larga.

¡Atención! Errores frecuentes

- Pensar que si ha salido cara cinco veces seguidas, es más probable cruz a la siguiente: los lanzamientos son independientes.
- Aplicar la regla de Laplace cuando los resultados no son igualmente probables.
- Dar una probabilidad mayor que 1 o negativa.
- Olvidar que «A o B» no es la suma de probabilidades si los sucesos pueden darse a la vez.

¿Sabías que...?

La probabilidad nació en el siglo XVII a partir de una consulta que un jugador, el caballero de Méré, hizo a Blaise Pascal sobre el reparto de apuestas en un juego de dados. Pascal escribió sobre ello a Pierre de Fermat y así empezó la teoría de la probabilidad. Hoy se usa para predecir el tiempo, calcular seguros, diseñar vacunas y

entender los resultados de las encuestas.

Tablas de doble entrada y lenguaje de la probabilidad

Cuando un experimento tiene dos pasos, como lanzar dos dados o elegir una camiseta y un pantalón, además del diagrama de árbol se puede usar una tabla de doble entrada. En las filas se colocan los resultados del primer paso, en las columnas los del segundo, y cada casilla es un resultado del experimento compuesto. Así es muy fácil contar los casos sin olvidar ninguno.

Método: contar con una tabla de doble entrada

1. Escribe en la primera columna los resultados del primer paso y en la primera fila los del segundo.
2. Rellena cada casilla con el resultado combinado (por ejemplo, la suma de los dos dados).
3. El número de casillas es el número de casos posibles.
4. Colorea las casillas que cumplen el suceso y cuéntalas: son los casos favorables.
5. Aplica la regla de Laplace y simplifica la fracción.

Ejemplo 11

Se lanzan dos dados. ¿Qué probabilidad hay de que salga al menos un 6?

La tabla de doble entrada tiene $6 \cdot 6 = 36$ casillas. Las que contienen algún 6 son las de la última fila (6 casillas) y las de la última columna (otras 6), pero la casilla (6, 6) está en las dos y no se puede contar dos veces: son $6 + 6 - 1 = 11$ casos favorables. La probabilidad es $\frac{11}{36} \approx 0{,}31$. También se puede calcular con el suceso contrario: «ningún 6» tiene $5 \cdot 5 = 25$ casos, y $1 - \frac{25}{36} = \frac{11}{36}$.

Definición: escala de probabilidad

La probabilidad de un suceso es siempre un número entre 0 y 1. Un suceso **imposible** tiene probabilidad 0; un suceso **seguro** tiene probabilidad 1. Entre ellos, decimos que un suceso es **poco probable** si su probabilidad está cerca de 0, **muy probable** si está cerca de 1, e **igual de probable que su contrario** si vale $\frac{1}{2}$.

¡Atención! El azar no tiene memoria

Si al lanzar una moneda han salido cinco caras seguidas, mucha gente piensa que «ahora toca cruz». Es falso: la moneda no recuerda los lanzamientos anteriores, y la probabilidad de cruz en el sexto lanzamiento sigue siendo $\frac{1}{2}$. Este error es tan habitual que tiene nombre: la falacia del jugador.

¿Sabías que...? Un juego de cartas dio origen a la probabilidad

En el siglo XVII, un jugador francés, el caballero de Méré, preguntó a Blaise Pascal cómo repartir el dinero de una partida interrumpida. Pascal se escribió cartas con Pierre de Fermat para resolverlo, y de esas cartas nació la teoría de la probabilidad que hoy se usa en meteorología, medicina o seguros.

El consejo de Otto

Escribe siempre los casos posibles antes de contar los favorables. Y si te cuesta contar un suceso, cuenta el contrario y réstalo de 1.