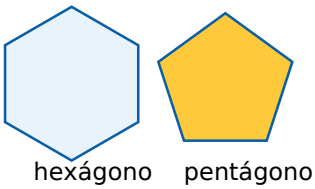
Apuntes - Polígonos y circunferencia

Curso: 1 Eso

Los polígonos y la circunferencia son las figuras planas básicas. Aprenderás a clasificarlas y a reconocer sus elementos y propiedades.

Actividad de introducción: formas a nuestro alrededor

Mira a tu alrededor: la señal de stop es un octógono, el panal de las abejas está formado por hexágonos, una pizza es un círculo y la pantalla de tu móvil es un rectángulo. Cada figura tiene propiedades distintas: sus lados, sus ángulos, sus diagonales. Con una rueda de bicicleta sabes que cuanto más grande es, más largo es el camino que recorre en una vuelta. Con una caja de baldosas hexagonales puedes cubrir un suelo sin dejar huecos. En este tema vas a clasificar polígonos, calcular ángulos y estudiar la circunferencia y el círculo.



hexágono pentágono

Polígonos

Definición: polígono

Un **polígono** es una figura plana cerrada limitada por segmentos llamados **lados**. Los puntos donde se unen son los **vértices**. Una **diagonal** une dos vértices no consecutivos. Según el número de lados se llaman triángulo (3), cuadrilátero (4), pentágono (5), hexágono (6), heptágono (7), octógono (8)...

Definición: polígono regular

Un polígono es **regular** si tiene todos sus lados y todos sus ángulos iguales. Su **apotema** es la distancia del centro al punto medio de un lado.

Propiedad

La suma de los ángulos interiores de un polígono de n lados es $(n-2)\cdot 180^\circ$. Un polígono es **convexo** si todos sus ángulos miden menos de 180°.

Ejemplo 1

¿Cuánto mide cada ángulo interior de un hexágono regular?

Suma: $(6-2)\cdot 180 = 720^\circ$. Cada ángulo: $720 : 6 = 120^\circ$.

Cuadriláteros

Definición: paralelogramo

Un cuadrilátero es un **paralelogramo** si tiene los lados opuestos paralelos: el cuadrado, el rectángulo, el rombo y el romboide. Un **trapecio** tiene solo un par de lados paralelos y un **trapezoide** ninguno.

Propiedades de los paralelogramos

En un paralelogramo los lados opuestos son iguales, los ángulos opuestos son iguales y las diagonales se cortan en su punto medio. En el rectángulo las diagonales son iguales y en el rombo son perpendiculares.

Ejemplo 2

En un paralelogramo un ángulo mide 70°. ¿Cuánto miden los otros tres?

El opuesto también mide 70°. Los consecutivos son suplementarios: $180 - 70 = 110^\circ$ cada uno.

Circunferencia y círculo

Definición: circunferencia y círculo

La **circunferencia** es el conjunto de puntos que están a la misma distancia (**radio**) de un punto llamado **centro**. El **círculo** es la región interior. El **diámetro** es una cuerda que pasa por el centro y mide $d = 2r$. Una **cuerda** une dos puntos de la circunferencia.

Propiedad

Una recta respecto a una circunferencia puede ser **secante** (la corta en dos puntos), **tangente** (en un punto) o **exterior**. La tangente es perpendicular al radio en el punto de tangencia.

Ejemplo 3

Una circunferencia tiene diámetro 14 cm. ¿Cuánto mide su radio y cuánto su longitud?

$r = 7$ cm. Longitud $L = 2\pi r = 2\pi \cdot 7 \approx 43{,}98$ cm.

Ejemplo 4

¿Cuántas diagonales tiene un octógono?

De cada vértice salen $8 - 3 = 5$. Hay $\frac{8 \cdot 5}{2} = 20$ diagonales.

¡Atención!

Un rombo no es un cuadrado: tiene los lados iguales pero sus ángulos pueden no ser rectos. El diámetro no es el radio: $d = 2r$.

Ángulos y diagonales de un polígono

Regla: suma de ángulos

Un polígono de n lados se puede dividir en n − 2 triángulos trazando diagonales desde un vértice, así que la suma de sus ángulos interiores es $(n - 2) \cdot 180°$. En un polígono regular, cada ángulo mide esa suma dividida entre n. Los ángulos exteriores de cualquier polígono suman 360°.

Ejemplo 5

Calcula el ángulo interior de un decágono regular.

Suma = (10 − 2) · 180° = 1 440°. Cada ángulo mide 1 440° : 10 = 144°.

Ejemplo 6

¿Cuántas diagonales tiene un polígono de 9 lados?

Número de diagonales = n(n − 3) : 2 = 9 · 6 : 2 = 27 diagonales.

Método: perímetro y área de un polígono regular

1. Calcula el perímetro P multiplicando el lado por el número de lados.
2. Identifica la apotema a, que es la distancia del centro al punto medio de un lado.
3. Aplica la fórmula del área $A = \frac{P \cdot a}{2}$.
4. Comprueba las unidades: cm² o m².

Ejemplo 7

Un pentágono regular tiene lado 6 cm y apotema 4,1 cm. Calcula su área.

P = 5 · 6 = 30 cm. A = 30 · 4,1 : 2 = 61,5 cm².

Cuadriláteros y circunferencia en problemas

Regla: clasificación de los cuadriláteros

Los **paralelogramos** tienen los lados opuestos paralelos: cuadrado, rectángulo, rombo y romboide. Los **trapecios** tienen solo un par de lados paralelos. Los **trapezoides** no tienen lados paralelos. Los ángulos de cualquier cuadrilátero suman 360°, y los lados opuestos de un paralelogramo son iguales entre sí.

Ejemplo 8

Una rueda de una bicicleta tiene 70 cm de diámetro. ¿Qué distancia recorre la bicicleta cuando la rueda da 100 vueltas? (π = 3,14)

En una vuelta recorre la longitud de la circunferencia: L = 3,14 · 70 = 219,8 cm. En 100 vueltas: 21 980 cm = 219,8 m.

Propiedad: relación entre elementos de la circunferencia

El diámetro es la cuerda más larga y mide el doble que el radio. La recta tangente es perpendicular al radio en el punto de tangencia. La longitud de la circunferencia es $2\pi r$ y el área del círculo es πr^2. Una cuerda divide al círculo en dos segmentos; si pasa por el centro, es un diámetro y los divide en dos semicírculos iguales.

¡Atención! Errores frecuentes

- Confundir circunferencia (la línea) con círculo (la superficie interior).
- Usar el diámetro en lugar del radio en la fórmula del área.
- Pensar que un polígono con todos los lados iguales es regular: el rombo tiene los lados iguales pero no los ángulos.
- Calcular la suma de los ángulos con n · 180° en vez de (n − 2) · 180°.

¿Sabías que...?

Las abejas construyen sus panales con hexágonos porque es el polígono regular que mejor aprovecha el espacio y la cera: cubre una superficie sin huecos y con el menor perímetro posible. El matemático griego Euclides estudió los polígonos y los círculos hace unos 2 300 años en su libro «Los Elementos», que ha sido uno de los libros de texto más usados de la historia.

Ángulos en la circunferencia y polígonos regulares

Los polígonos regulares y la circunferencia están muy relacionados: todo polígono regular se puede inscribir en una circunferencia, es decir, dibujar dentro de ella de forma que todos sus vértices estén sobre la circunferencia. Esta relación permite calcular sus ángulos de forma muy sencilla a partir de la vuelta completa, que mide 360°.

Definición: ángulo central

Un **ángulo central** es el que tiene su vértice en el centro de la circunferencia. En un polígono regular de n lados inscrito en una circunferencia, el ángulo central que abarca cada lado mide $\frac{360^\circ}{n}$. El **ángulo exterior** del polígono, el que forma un lado con la prolongación del lado contiguo, mide lo mismo.

Propiedad: ángulo interior y ángulo exterior

En cada vértice, el ángulo interior y el ángulo exterior suman 180°, porque juntos forman un ángulo llano. Por eso, en un polígono regular de n lados, el ángulo interior mide $180^\circ - \frac{360^\circ}{n}$. Para el hexágono: $180^\circ - 60^\circ = 120^\circ$, el mismo resultado que con la fórmula $(n-2)\cdot 180^\circ : n$.

Ejemplo 9

Dibuja un pentágono regular inscrito en una circunferencia de 4 cm de radio.

El ángulo central mide $360^\circ : 5 = 72^\circ$. Trazamos la circunferencia con el compás y un radio cualquiera. Con el transportador, colocado en el centro, marcamos un ángulo de 72° a partir de ese radio, y repetimos cuatro veces hasta completar la vuelta. Los cinco puntos en los que los radios cortan a la circunferencia son los vértices. Al unirlos con la regla obtenemos el pentágono regular, cuyos ángulos interiores miden $180^\circ - 72^\circ = 108^\circ$.

Ejemplo 10

¿Cuántos lados tiene un polígono regular cuyo ángulo interior mide 140°?

El ángulo exterior mide $180^\circ - 140^\circ = 40^\circ$. Como los ángulos exteriores de cualquier polígono suman 360°, el número de lados es $360 : 40 = 9$. Es un eneágono regular. Comprobación: $(9-2)\cdot 180^\circ : 9 = 1\,260^\circ : 9 = 140^\circ$.

¡Atención! Radio y apotema no son lo mismo

El radio de un polígono regular va del centro a un vértice; la apotema va del centro al punto medio de un lado y es perpendicular a él. La apotema siempre es más corta que el radio. En el área $A = \frac{P\cdot a}{2}$ se usa la apotema, nunca el radio.

¿Sabías que...? Los polígonos de la Alhambra

Los artesanos que decoraron la Alhambra de Granada cubrieron paredes enteras con mosaicos formados por polígonos regulares y estrellas. Combinando triángulos, cuadrados, hexágonos y octógonos lograron diseños que se repiten sin dejar huecos.

Siglos después, el artista Escher visitó la Alhambra y se inspiró en ellos para sus famosos teselados.

El consejo de Otto

Para clasificar un cuadrilátero, hazte tres preguntas: ¿tiene lados paralelos?, ¿sus lados son iguales?, ¿sus ángulos son rectos? Con las respuestas sabrás qué figura es.