Apuntes - Números naturales y operaciones

Curso: 1 Eso

Los números naturales sirven para contar y ordenar. En este tema repasas las cuatro operaciones, aprendes a calcular potencias y raíces cuadradas y descubres en qué orden hay que hacer los cálculos.

Actividad de introducción: la gran compra

Un lunes, el colegio de Sofía recibe 24 cajas con 36 cuadernos cada una para repartirlas entre 18 clases. ¿Cuántos cuadernos hay en total? ¿Cuántos corresponden a cada clase? ¿Sobra alguno? Para contestar tienes que multiplicar y dividir números grandes y decidir qué operación aplicar. Si además el director pregunta cuánto cuestan los cuadernos a 1 € cada uno, necesitarás sumar, restar y respetar la jerarquía de las operaciones. Este tema repasa todas esas herramientas para trabajar con números naturales con soltura y sin errores.

Los números naturales

Definición: número natural

Los **números naturales** son $0, 1, 2, 3, \ldots$ y forman el conjunto $\mathbb{N}$. Se escriben con diez cifras en un **sistema posicional decimal**: el valor de cada cifra depende del lugar que ocupa (unidades, decenas, centenas, millares...).

Propiedad

Entre dos naturales siempre se puede decidir cuál es mayor. En la recta numérica, el mayor está más a la derecha. Cada natural tiene un **siguiente** ($n + 1$), así que no existe el mayor de todos.

Las cuatro operaciones

Propiedades

La suma y el producto cumplen la propiedad **conmutativa** ($a + b = b + a$, $a \cdot b = b \cdot a$), la **asociativa** y la **distributiva**: $a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c$. La resta y la división no son conmutativas.

Definición: división entera

Dividir D entre d es hallar el cociente c y el resto r que cumplen $D = d \cdot c + r$ con

$0 \leq r$. La división es **exacta** si $r = 0$.

Ejemplo 1

Divide 487 entre 12 y comprueba el resultado.

$487 : 12$ da cociente 40 y resto 7, porque $12 \cdot 40 = 480$ y $487 - 480 = 7$. Comprobación: $12 \cdot 40 + 7 = 487$. Se cumple r.

¡Atención!

No se puede dividir entre 0. Además, una resta como $5 - 8$ no tiene resultado en los naturales: de momento solo puedes restar un número menor o igual.

Potencias y raíz cuadrada

Definición: potencia

Una **potencia** a^n es un producto de n factores iguales a a: $a^n = a \cdot a \cdots a$. El número a es la **base** y n el **exponente**. Por convenio $a^1 = a$ y $a^0 = 1$ (con $a \neq 0$).

Regla: propiedades de las potencias

Para el mismo número: $a^m \cdot a^n = a^{m+n}$, $a^m : a^n = a^{m-n}$ y $(a^m)^n = a^{m \cdot n}$.

Definición: raíz cuadrada

La **raíz cuadrada** de un número a es el número b que cumple $b^2 = a$. Se escribe $\sqrt{a} = b$. Si a es un cuadrado perfecto (1, 4, 9, 16, 25, 36...) la raíz es exacta; si no, se aproxima: $\sqrt{50} \approx 7{,}07$.

Método: calcular una raíz entera aproximada

1. Busca el cuadrado perfecto más cercano por debajo del número.
2. Busca el cuadrado perfecto más cercano por encima.
3. La raíz está entre las dos raíces exactas. Por ejemplo, 49, luego 7.

Jerarquía de las operaciones

Regla: prioridad de las operaciones

Se calcula en este orden: 1.º paréntesis (de dentro hacia fuera), 2.º potencias y raíces, 3.º productos y divisiones (de izquierda a derecha), 4.º sumas y restas (de izquierda a derecha).

Ejemplo 2

Calcula $3 + 2 \cdot (10 - 4)^2 - 18 : 3$.

Paréntesis: $10 - 4 = 6$. Potencia: $6^2 = 36$. Producto y división: $2 \cdot 36 = 72$ y $18 : 3 = 6$. Suma y resta: $3 + 72 - 6 = 69$.

Ejemplo 3

Un cine tiene 18 filas de 24 butacas. Si hay 395 entradas vendidas, ¿cuántas butacas quedan libres?

Butacas: $18 \cdot 24 = 432$. Libres: $432 - 395 = 37$ butacas.

Estimación y cálculo mental

Método: estimar un resultado

1. Redondea cada número a la decena o centena más cercana.
2. Haz la operación con los números redondeados.
3. Compara con el resultado exacto: tienen que ser parecidos.

Observación

Para multiplicar por 10, 100, 1000 añade ceros. Para multiplicar por 5 puedes multiplicar por 10 y dividir entre 2: $38 \cdot 5 = 380 : 2 = 190$.

¡Atención!

$2 + 3 \cdot 4$ vale 14, no 20. Y 2^3 es 8, no 6: no es $2 \cdot 3$.

Operaciones en problemas de la vida real

Método: resolver un problema con números naturales

1. Lee el enunciado y subraya los datos numéricos.
2. Decide las operaciones: si se juntan cantidades, se suma; si se repiten, se multiplica; si se reparte, se divide.
3. Escribe la expresión completa antes de calcular.
4. Calcula respetando la jerarquía de las operaciones.
5. Comprueba con una estimación y escribe la respuesta con unidades.

Ejemplo 6

Un autobús lleva 48 viajeros. En la primera parada bajan 12 y suben 7; en la

segunda bajan 15 y suben 20. ¿Cuántos viajeros lleva al final?

48 − 12 + 7 − 15 + 20 = 48. Primero 48 − 12 = 36, luego 36 + 7 = 43, 43 − 15 = 28 y 28 + 20 = 48. Lleva 48 viajeros.

Ejemplo 7

Una caja contiene 24 botes de pintura. Se piden 15 cajas y se reparten entre 9 aulas. ¿Cuántos botes toca a cada aula?

Total: 24 · 15 = 360 botes. Reparto: 360 : 9 = 40 botes por aula, sin resto.

Regla: la prueba de la división

En toda división exacta o entera se cumple **dividendo = divisor · cociente + resto**, con el resto menor que el divisor. Sirve para comprobar el resultado: si 487 : 12 da cociente 40 y resto 7, entonces 12 · 40 + 7 = 487.

Regla: potencias y raíces

Una potencia es una multiplicación repetida: $5^3 = 5 \cdot 5 \cdot 5 = 125$. Todo número elevado a 0 vale 1 y a 1 es él mismo. La raíz cuadrada es la operación inversa: $\sqrt{81} = 9$ porque $9^2 = 81$. Si la raíz no es exacta, se toma la entera por defecto y se calcula el resto.

¡Atención! Errores frecuentes

- Hacer las operaciones de izquierda a derecha sin respetar la prioridad: 3 + 4 · 5 es 23, no 35.
- Confundir 2^3 (que es 8) con 2 · 3 (que es 6).
- Olvidar los paréntesis al escribir una expresión: «el doble de la suma de 3 y 4» es 2 · (3 + 4).
- No comprobar el resto de una división: debe ser menor que el divisor.

¿Sabías que...?

Nuestro sistema de numeración es decimal y posicional: el valor de cada cifra depende del lugar que ocupa. Lo inventaron los matemáticos de la India hace más de 1 500 años y llegó a Europa a través de los árabes, por eso las cifras 0 a 9 se llaman «cifras arábigas». Los romanos, en cambio, no tenían el cero y era muy difícil multiplicar con sus números.

Propiedades que ayudan a calcular

Las propiedades de las operaciones no son solo reglas para memorizar: son herramientas que permiten calcular más deprisa, sobre todo mentalmente. Un buen calculista

reorganiza las operaciones para que los números sean más sencillos antes de empezar a operar.

Propiedad distributiva

Multiplicar un número por una suma es lo mismo que multiplicarlo por cada sumando y sumar los resultados: $a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c$. También funciona con la resta: $a \cdot (b - c) = a \cdot b - a \cdot c$. Leída al revés, permite *sacar factor común*: $7 \cdot 13 + 7 \cdot 7 = 7 \cdot (13 + 7) = 7 \cdot 20 = 140$.

Ejemplo 8

Calcula mentalmente $25 \cdot 36$ y $99 \cdot 14$.

Para el primero, usamos las propiedades asociativa y conmutativa: $25 \cdot 36 = 25 \cdot 4 \cdot 9 = 100 \cdot 9 = 900$, porque $25 \cdot 4 = 100$ es muy fácil. Para el segundo usamos la propiedad distributiva con la resta: $99 \cdot 14 = (100 - 1) \cdot 14 = 1\,400 - 14 = 1\,386$. En los dos casos hemos cambiado una multiplicación difícil por operaciones sencillas.

Ejemplo 9

Una caja tiene 12 filas de 15 bombones. ¿Cuántos bombones hay en 8 cajas?

Primero calculamos los bombones de una caja: $12 \cdot 15 = 180$. Después los de 8 cajas: $180 \cdot 8 = 1\,440$. También podemos escribirlo de una vez como $8 \cdot 12 \cdot 15$ y agrupar como convenga: $8 \cdot 15 = 120$ y $120 \cdot 12 = 1\,440$. La propiedad asociativa garantiza que el resultado es el mismo. Respuesta: hay 1 440 bombones.

¡Atención! La resta y la división no son conmutativas

En la suma y en la multiplicación el orden no importa: $5 + 8 = 8 + 5$ y $4 \cdot 6 = 6 \cdot 4$. Pero $10 - 4 = 6$ y $4 - 10$ ni siquiera es un número natural, y $12 : 3 = 4$ mientras que $3 : 12$ no es exacta. Al reorganizar un cálculo, mueve solo sumandos y factores, nunca el orden de una resta o de una división.

¿Sabías que...? El origen de nuestras cifras

Las cifras que usamos, del 0 al 9, se llaman indoarábigas: se inventaron en la India y llegaron a Europa a través de los matemáticos árabes de Al-Ándalus. Fueron muy importantes los traductores de Toledo en el siglo XII. Antes, en Europa se usaban los números romanos, con los que era muy difícil multiplicar.

Ejemplo 10

Calcula mentalmente $47 + 38 + 53 + 62$ y $4 \cdot 17 \cdot 25$.

En la suma buscamos parejas que den decenas completas. La propiedad conmutativa

permite reordenar: $(47 + 53) + (38 + 62) = 100 + 100 = 200$. En el producto agrupamos los factores que dan un número redondo: $(4 \cdot 25) \cdot 17 = 100 \cdot 17 = 1\,700$. En los dos casos hemos evitado hacer las operaciones en el orden en que aparecen, que habría sido mucho más laborioso.

Observación: la prueba del nueve

Antiguamente se comprobaban las multiplicaciones con la «prueba del nueve», que usa la suma de las cifras. Hoy basta con estimar el resultado o con hacer la operación inversa: si $238 \cdot 46 = 10\,948$, entonces $10\,948 : 46$ debe dar exactamente 238.

El consejo de Otto

Antes de calcular, subraya los paréntesis y las potencias. Resuelve cada paso en una línea nueva y no hagas dos cosas a la vez: así no te saltas la prioridad.