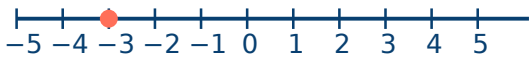
Apuntes - Números enteros

Curso: 1 Eso

Los números enteros incluyen los negativos y permiten expresar deudas, temperaturas bajo cero o alturas bajo el nivel del mar.

Actividad de introducción: el termómetro de la montaña

Esta mañana, en la sierra de Gredos, el termómetro marca −3 °C. Durante el día sube 8 grados, pero por la noche baja 10. ¿Qué temperatura habrá al final? Para saberlo calculas −3 + 8 − 10 = −5 °C. En otra escena, Pablo debe 12 € a su hermana y recibe 20 € de paga; su dinero real es −12 + 20 = 8 €. Estos números con signo, que usamos para temperaturas, deudas, plantas de un edificio o años antes de Cristo, son los números enteros. En este tema aprenderás a ordenarlos y a operar con ellos.



Qué son los números enteros

Definición: número entero

Los **enteros** $\mathbb{Z}$ son los naturales, sus **opuestos** negativos y el cero: $\ldots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \ldots$. En la recta numérica, de dos enteros es mayor el que está más a la derecha.

Observación

Cualquier negativo es menor que cualquier positivo, y entre dos negativos es mayor el que está más cerca del cero: $-2 > -7$.

Valor absoluto y opuesto

Definición: valor absoluto

El **valor absoluto** de a, escrito $|a|$, es su distancia al cero: $|-5| = 5$ y $|5| = 5$. El **opuesto** de a es $-a$ y cumple $a + (-a) = 0$.

Suma y resta de enteros

Regla: suma y resta

Si los signos son **iguales**, se suman los valores absolutos y se deja el signo común. Si son **distintos**, se restan los valores absolutos (el mayor menos el menor) y se deja el

signo del de mayor valor absoluto. Restar es sumar el opuesto: $a - b = a + (-b)$.

Ejemplo 1

Calcula $(-8) + 5 - (-4) - 9$.

Restar -4 es sumar 4: $-8 + 5 + 4 - 9$. Primero $-8 + 5 = -3$, luego $-3 + 4 = 1$ y $1 - 9 = -8$.

Multiplicación y división de enteros

Regla de los signos

Regla de los signos: $(+) \cdot (+) = +$, $(-) \cdot (-) = +$, $(+) \cdot (-) = -$, $(-) \cdot (+) = -$. Para dividir se aplican las mismas reglas.

Ejemplo 2

Calcula $(-6) \cdot (-3)$ y $(-24) : (+8)$.

Signos iguales: $(-6) \cdot (-3) = 18$. Signos distintos: $(-24) : 8 = -3$.

Potencias de números enteros

Propiedad

Una potencia de base negativa es **positiva** si el exponente es par y **negativa** si es impar: $(-2)^4 = 16$ y $(-2)^3 = -8$.

¡Atención!

$(-3)^2 = 9$, pero $-3^2 = -9$: sin paréntesis el exponente solo afecta al 3.

Operaciones combinadas

Método: resolver una operación combinada

1. Quita los paréntesis de dentro hacia fuera.
2. Calcula las potencias.
3. Haz productos y divisiones de izquierda a derecha.
4. Termina con sumas y restas.

Ejemplo 3

Calcula $5 - (-3)^2 \cdot 2 + 12 : (-4)$.

Potencia: $(-3)^2 = 9$. Producto: $9 \cdot 2 = 18$. División: $12 : (-4) = -3$. Queda $5 - 18 + (-3) = 5 - 18 - 3 = -16$.

Los enteros en la vida cotidiana

Ejemplo 4

A las 7:00 la temperatura era de -4 °C. A mediodía subió 11 grados y por la noche bajó 9. ¿Qué temperatura hay por la noche?

$-4 + 11 = 7$ a mediodía y $7 - 9 = -2$. Por la noche hay -2 °C.

Observación

Un saldo negativo es una deuda, el sótano de un edificio es una planta negativa y el nivel del mar es el 0 de las altitudes.

¡Atención!

Dos signos seguidos se separan con paréntesis: $3 + -2$ se escribe $3 + (-2)$. Y $-(-5) = +5$, no -5.

Cómo sumar y restar con la recta

Método: sumar y restar enteros

1. Si los dos números tienen el mismo signo, se suman los valores absolutos y se pone el mismo signo: −5 + (−3) = −8.
2. Si tienen distinto signo, se restan los valores absolutos y se pone el signo del mayor: −9 + 4 = −5.
3. Restar es sumar el opuesto: 6 − (−2) = 6 + 2 = 8.
4. Comprueba el resultado situándote en la recta numérica.

Ejemplo 8

Calcula −7 + 12 − (−5) − 9.

Restar −5 es sumar 5: −7 + 12 + 5 − 9. De izquierda a derecha: 5, 10, 1. Resultado: 1.

Ejemplo 9

Calcula (−3)·(−4) + 6 : (−2).

Primero productos y cocientes: (−3)·(−4) = 12 y 6 : (−2) = −3. Después, 12 + (−3) = 9.

Regla de los signos para producto y cociente

Si los dos números tienen el mismo signo, el resultado es positivo; si tienen distinto signo, el resultado es negativo. Así: $(+)\cdot(+) = +$, $(-)\cdot(-) = +$, $(+)\cdot(-) = -$, $(-)\cdot(+) = -$. Lo mismo ocurre al dividir.

Ejemplo 10

En una cuenta bancaria hay 85 €. Se pagan dos recibos de 40 € y se ingresan 30 €. ¿Cuál es el saldo?

$85 - 40 - 40 + 30 = 35$ €. Si en vez de 30 € se ingresaran 5 €, el saldo sería $85 - 80 + 5 = 10$ €. Si se pagara un tercer recibo de 40 €, el saldo sería -5 €: un saldo negativo significa deuda.

Ejemplo 11

Una buceadora está a −15 m, sube 6 m y baja 9 m. ¿A qué profundidad queda? ¿Cuántos metros la separan de la superficie?

$-15 + 6 - 9 = -18$ m. La superficie es 0, así que la separan $|-18| = 18$ metros.

Propiedad: valor absoluto y opuesto

El **valor absoluto** de un entero es su distancia al 0 en la recta: $|-7| = 7$ y $|7| = 7$. El **opuesto** de un entero es el que está a la misma distancia del 0 al otro lado: el opuesto de 5 es -5, y el opuesto de -3 es 3. La suma de un número y su opuesto es siempre 0.

¡Atención! Errores frecuentes

- Confundir -3^2 con $(-3)^2$: el primero vale -9 y el segundo, 9.
- Olvidar que restar un negativo es sumar: $5 - (-2) = 7$.
- Pensar que -10 es mayor que -2 porque 10 es mayor que 2: en realidad $-10 < -2$.
- Aplicar la regla de los signos de la multiplicación a la suma: $-3 + (-4) = -7$, no $+7$.

¿Sabías que...?

Los números negativos aparecieron en la India hace unos 1 400 años, donde se usaban para representar deudas. En Europa tardaron mucho en aceptarse: hasta el siglo XVII muchos matemáticos los llamaban «números absurdos». Hoy los vemos a diario en los termómetros, en los ascensores con sótanos y en las cuentas del banco.

Problemas con números enteros: variaciones y diferencias

Los números enteros sirven para describir situaciones en las que una cantidad puede estar por encima o por debajo de una referencia: el nivel del mar, los 0 °C, la planta baja de un edificio o el saldo cero de una cuenta. En los problemas aparecen dos tipos de preguntas: calcular dónde se llega después de una serie de cambios, y calcular la distancia o diferencia entre dos valores.

Método: calcular una variación

1. Identifica el valor inicial y el valor final.
2. Calcula la variación como *valor final − valor inicial*.
3. Si el resultado es positivo, la cantidad ha aumentado; si es negativo, ha disminuido.
4. Para la distancia entre dos valores, toma el valor absoluto de la diferencia: la distancia nunca es negativa.

Ejemplo 12

A las 7:00 el termómetro de Burgos marcaba −5 °C y a las 15:00 marcaba 9 °C. ¿Cuánto ha variado la temperatura?

Valor final menos valor inicial: $9-(-5)=9+5=14$. La temperatura ha subido 14 °C. Si lo comprobamos en la recta numérica, de −5 a 0 hay 5 grados y de 0 a 9 hay 9 grados, en total 14 grados. Si por la noche vuelve a −2 °C, la variación es $-2-9=-11$: ha bajado 11 °C.

Ejemplo 13

Arquímedes nació en el año 287 a. C. y murió en el 212 a. C. ¿Cuántos años vivió?

Los años antes de Cristo se pueden escribir como números negativos: nació en −287 y murió en −212. Su edad es la diferencia $-212-(-287)=-212+287=75$ años. Observa que, en los años antes de Cristo, el número más grande corresponde a la fecha más antigua.

Observación: sumar muchos enteros a la vez

Cuando hay que sumar una lista larga de números positivos y negativos, como los ingresos y gastos de un mes, es cómodo sumar por separado todos los positivos y todos los negativos y, al final, restar. Por ejemplo, $+120-45+60-90=(120+60)-(45+90)=180-135=45$. Así se cometen menos errores de signo.

¡Atención! Orden de los números negativos

Entre dos números negativos es mayor el que está más cerca del cero: $-2 > -7$, porque -2 °C es una temperatura más alta que -7 °C. No te dejes engañar por el 7, que es mayor que el 2: con el signo menos, el orden se invierte.

¿Sabías que…? Los números negativos tardaron en aceptarse

Los matemáticos chinos ya usaban varillas rojas para los números positivos y negras para los negativos hace más de 2 000 años, y en la India se interpretaban como deudas. Sin embargo, en Europa muchos matemáticos los llamaron «números absurdos» hasta el siglo XVII. Hoy los usamos a diario en el ascensor, en el banco o en el parte del tiempo.

El consejo de Otto

Para sumar enteros imagina dinero: un número positivo es lo que tienes y un negativo lo que debes. Si debes 8 € y recibes 5 €, aún debes 3 €: $-8 + 5 = -3$.