Apuntes - Lenguaje algebraico

Curso: 1 Eso

El álgebra usa letras para representar números desconocidos o que cambian. Con ella se escriben fórmulas y se traducen enunciados a expresiones matemáticas.

Actividad de introducción: el truco del número

Marta propone un juego a sus amigos: «Piensa un número, multiplícalo por 2, suma 10, divide entre 2 y resta el número que pensaste. ¡Te digo el resultado!». Pablo piensa en el 3, Lucía en el 8 y Dani en el 15, y a todos les sale 5. ¿Es magia? No: si el número es x, los pasos son (2x + 10) : 2 − x = x + 5 − x = 5. Con una letra podemos describir lo que ocurre con cualquier número. Eso es el lenguaje algebraico: una forma corta y potente de escribir lo que hacemos con los números.

El lenguaje algebraico

Definición: expresión algebraica

Una **expresión algebraica** combina números y letras (**variables** o incógnitas) mediante operaciones: $3x + 5$, $a \cdot b$, $2n - 1$. Se omite el signo de multiplicar entre número y letra: $3x$ significa $3 \cdot x$.

Valor numérico

Definición: valor numérico

El **valor numérico** de una expresión es el número que resulta al sustituir las letras por valores concretos.

Ejemplo 1

Halla el valor numérico de $2x^2 - 3x + 1$ para $x = -2$.

$2 \cdot (-2)^2 - 3 \cdot (-2) + 1 = 2 \cdot 4 + 6 + 1 = 15.$

Monomios

Definición: monomio

Un **monomio** es el producto de un número, el **coeficiente**, por una o más letras con exponentes naturales, la **parte literal**. En $-5x^2y$, el coeficiente es -5, la parte literal x^2y y el **grado** es $2 + 1 = 3$. Dos monomios son **semejantes** si tienen la misma parte literal.

Operaciones con monomios

Regla: operar con monomios

Solo se pueden sumar o restar monomios **semejantes**: se suman los coeficientes y se mantiene la parte literal. El producto de monomios multiplica coeficientes y suma exponentes de la misma letra: $3x^2 \cdot 4x^3 = 12x^5$.

Ejemplo 2

Simplifica $5x^2 - 2x^2 + 3x + 4x$.

$5x^2 - 2x^2 = 3x^2$ y $3x + 4x = 7x$. Queda $3x^2 + 7x$.

Quitar paréntesis y simplificar

Regla: paréntesis

Un signo $+$ delante del paréntesis no cambia los signos de dentro; un signo $-$ los cambia todos. Un número delante multiplica cada término: $3(x - 2) = 3x - 6$.

Ejemplo 3

Simplifica $4(x + 3) - (2x - 5)$.

$4x + 12 - 2x + 5 = 2x + 17$.

Cómo traducir un enunciado

Método: traducir un enunciado

1. Elige una letra para la cantidad desconocida.
2. Expresa las demás cantidades en función de esa letra.
3. Escribe la expresión con las operaciones indicadas.

Ejemplo 4

Escribe: «el doble de un número más tres», «el perímetro de un rectángulo de base b y altura h».

$2x + 3$ y $P = 2b + 2h$. Si un número es n, su consecutivo es $n + 1$ y los impares se escriben $2n + 1$.

Ejemplo 5

Ana tiene x euros, Luis el triple y Marta 5 menos que Ana. Expresa el dinero total.

Luis: $3x$. Marta: $x - 5$. Total: $x + 3x + x - 5 = 5x - 5$.

¡Atención!

$3x$ no es $3 + x$, y $x + x = 2x$, no x^2. Tampoco se pueden sumar $2x$ y $3x^2$, porque no son semejantes.

Expresiones con varias letras y fórmulas

Regla: fórmulas y letras

Las letras permiten escribir **fórmulas** generales: el perímetro de un cuadrado es $P = 4l$, el área de un rectángulo es $A = b \cdot h$ y el espacio recorrido a velocidad constante es $d = v \cdot t$. Para usar una fórmula se sustituyen las letras por sus valores y se calcula.

Ejemplo 7

Calcula el área de un rectángulo de base 12 cm y altura 7 cm con la fórmula A = b · h.

A = 12 · 7 = 84 cm².

Ejemplo 8

Un fontanero cobra 25 € de desplazamiento y 18 € por hora. Escribe la expresión del importe y calcula 3,5 horas.

Importe = 25 + 18x. Para x = 3,5: 25 + 63 = 88 €.

Ejemplo 9

Simplifica 4(2x − 1) − 3(x + 2).

Se aplica la propiedad distributiva: 8x − 4 − 3x − 6 = 5x − 10.

Producto y cociente de monomios

Regla: multiplicar y dividir monomios

Para multiplicar monomios se multiplican los coeficientes y se suman los exponentes de las letras iguales: $(3x^2) \cdot (4x^3) = 12x^5$. Para dividir se dividen los coeficientes y se restan los exponentes: $(12x^5) : (4x^2) = 3x^3$. El grado del producto es la suma de los grados.

Ejemplo 10

Calcula $(-2ab)\cdot(5a^2b)$ y $(18x^4y):(6x^2)$.

Primer producto: (−2)·5 = −10; a·a² = a³; b·b = b². Resultado: −10a³b². Cociente: 18 : 6 = 3; x⁴ : x² = x²; la y se queda. Resultado: 3x²y.

Ejemplo 11

La longitud de un lado de un cuadrado es 3x metros. Escribe su perímetro y su área.

Perímetro: 4 · 3x = 12x metros. Área: (3x)² = 9x² metros cuadrados. Con x = 2, el lado mide 6 m, el perímetro 24 m y el área 36 m².

Método: pasar de un enunciado a una expresión

1. Subraya los datos y la cantidad desconocida; llámala x.
2. Traduce cada frase: «el doble» es 2x; «tres más que» es x + 3; «la mitad» es x : 2.
3. Une las partes con las operaciones del enunciado.
4. Simplifica reduciendo términos semejantes.
5. Comprueba con un número concreto.

Ejemplo 12

Una tienda vende cuadernos a x euros y bolígrafos a 2 euros menos. Escribe el precio de 3 cuadernos y 4 bolígrafos y simplifícalo.

3x + 4(x − 2) = 3x + 4x − 8 = 7x − 8. Si x = 3, el gasto es 7 · 3 − 8 = 13 euros: 9 euros por los cuadernos y 4 por los bolígrafos de 1 euro.

Propiedad: términos semejantes

Dos monomios son semejantes si tienen la misma parte literal. Solo se pueden sumar o restar términos semejantes: $3x+5x=8x$, pero $3x+5x^2$ no se puede simplificar. Se suman los coeficientes y se mantiene la parte literal.

¡Atención! Errores frecuentes

- Sumar términos que no son semejantes: $2x+3y\neq 5xy$.
- Olvidar el signo menos al quitar un paréntesis: $-(x-4)=-x+4$.
- Confundir $2x$ (doble de x) con x^2 (x al cuadrado).
- Al sustituir un valor negativo, no ponerlo entre paréntesis.

¿Sabías que...?

Los antiguos escribían las ecuaciones con palabras: «la cosa y su cuadrado son iguales a...». Fue el francés François Viète, en el siglo XVI, quien empezó a usar letras para las incógnitas y los datos, y el signo igual (=) lo inventó el galés Robert Recorde en 1557, porque «dos rectas paralelas no pueden ser más iguales».

Patrones, secuencias y expresiones generales

Una de las utilidades más importantes del álgebra es describir un patrón que se repite. Cuando construimos figuras con palillos, colocamos mesas en fila o contamos las baldosas de un borde, observamos que cada paso añade siempre la misma cantidad. Con una letra podemos escribir una expresión que sirve para cualquier paso, aunque sea el número 100 o el 1 000.

Método: encontrar la expresión de un patrón

1. Haz una tabla con el número de la figura n (1, 2, 3, 4...) y la cantidad que cuentas.
2. Calcula cuánto aumenta la cantidad de una figura a la siguiente. Si siempre aumenta lo mismo, ese número multiplica a n.
3. Averigua qué hay que sumar o restar para que la expresión dé el valor de la primera figura.
4. Comprueba la expresión con otra figura de la tabla.

Ejemplo 13

En un comedor se juntan mesas cuadradas en fila. Con 1 mesa se sientan 4 personas, con 2 mesas 6 personas y con 3 mesas 8 personas. ¿Cuántas personas se sientan con n mesas? ¿Y con 20 mesas?

Cada mesa nueva añade 2 sitios, así que la expresión empieza por $2n$. Para $n = 1$, $2n$ vale 2, pero se sientan 4 personas: hay que sumar 2. La expresión es $2n + 2$. Comprobamos con 3 mesas: $2 \cdot 3 + 2 = 8$, correcto. Con 20 mesas se sientan $2 \cdot 20 + 2 = 42$ personas. Los 2 sitios que se suman corresponden a las dos cabeceras de la fila.

Ejemplo 14

Comprueba con álgebra el truco: «Piensa un número, súmale 3, multiplica por 2, resta 6 y divide entre 2. Siempre obtienes el número que pensaste».

Llamamos x al número pensado. Sumar 3 da $x + 3$; multiplicar por 2 da $2(x + 3) = 2x + 6$; restar 6 da $2x$; dividir entre 2 da x. Como el resultado es x para cualquier valor de x, el truco funciona siempre. El álgebra permite demostrar que algo es cierto para todos los números, no solo para los que hemos probado.

¡Atención! $2x$ no es lo mismo que x^2

$2x$ significa $x + x$, el doble del número; x^2 significa $x \cdot x$, el cuadrado. Para $x = 5$, $2x = 10$ y $x^2 = 25$. Tampoco se pueden sumar $3x$ y $2x^2$: no son términos semejantes porque sus partes literales son distintas, y la expresión $3x + 2x^2$ ya no se puede reducir más.

¿Sabías que...? De dónde viene la palabra «álgebra»

La palabra álgebra procede del título de un libro escrito hacia el año 820 por el matemático persa Al-Juarismi, que trabajaba en Bagdad. En él explicaba cómo «completar» y «equilibrar» una igualdad, en árabe *al-jabr*. De su nombre deriva también la palabra «algoritmo». Sin embargo, durante siglos los problemas se escribían con palabras: el uso de letras como x para las incógnitas no se generalizó hasta el siglo XVII, con Descartes.

El consejo de Otto

Para traducir un enunciado, subraya las palabras clave: «doble» es $2x$, «mitad» es $\frac{x}{2}$, «menos que» resta, «más que» suma. Prueba con un número concreto para comprobar tu expresión.