Apuntes - Fracciones

Curso: 1 Eso

Una fracción es una parte de un todo. Aquí aprenderás a simplificarlas, compararlas y operar con ellas, que es la base de todo el cálculo posterior.

Actividad de introducción: la tableta de chocolate

En casa de Nuria compran una tableta de chocolate de 12 onzas para repartirla entre tres hermanos. Nuria se come 3 onzas, su hermano Javier 4 y la pequeña Alba 2. Para saber qué parte de la tableta ha tomado cada uno, necesitamos las fracciones: Nuria ha comido $\frac{3}{12}$, Javier $\frac{4}{12}$ y Alba $\frac{2}{12}$. Entre los tres han tomado $\frac{9}{12}$, y quedan $\frac{3}{12}$. ¿Podrías decir cuál de las fracciones es la mayor? ¿Y cuántas onzas son $\frac{1}{4}$ de la tableta? Al final del tema sabrás responder a todo con seguridad.



5 partes de 12 sombreadas: 5/12

Qué es una fracción

Definición: fracción

Una **fracción** $\frac{a}{b}$ representa a partes de un total dividido en b partes iguales. El **numerador** a indica las partes que se toman y el **denominador** b (nunca 0) las partes en que se divide el total.

Propiedad

Si a la fracción es **propia** (vale menos que 1). Si $a \geq b$ es **impropia** y se puede escribir como **número mixto**: $\frac{17}{5} = 3\frac{2}{5}$, porque $17 : 5$ da cociente 3 y resto 2.

Método: calcular la fracción de una cantidad

1. Divide la cantidad entre el denominador.
2. Multiplica el resultado por el numerador.

Ejemplo 1

Calcula los $\frac{3}{5}$ de 40.

$40 : 5 = 8$ y $8 \cdot 3 = 24$. Son 24.

Fracciones equivalentes y simplificación

Definición: fracciones equivalentes

Dos fracciones son **equivalentes** si representan la misma cantidad. Se obtienen multiplicando o dividiendo numerador y denominador por el mismo número. Se comprueba con los productos cruzados: $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ si $a \cdot d = b \cdot c$.

Método: simplificar una fracción

1. Calcula el mcd de numerador y denominador.
2. Divide ambos entre el mcd.
3. El resultado es la fracción irreducible, que ya no se puede simplificar.

Ejemplo 2

Simplifica $\frac{36}{48}$.

El mcd de 36 y 48 es 12. Entonces $\frac{36}{48} = \frac{3}{4}$.

Comparar fracciones

Regla: comparar

Con el mismo denominador es mayor la de mayor numerador. Con distinto denominador se reducen primero a **común denominador** usando el mcm de los denominadores.

Ejemplo 3

Compara $\frac{5}{8}$ y $\frac{7}{12}$.

$\text{mcm}(8, 12) = 24$. $\frac{5}{8} = \frac{15}{24}$ y $\frac{7}{12} = \frac{14}{24}$. Como $15 > 14$, $\frac{5}{8} > \frac{7}{12}$.

Suma y resta

Regla: suma y resta

Con el mismo denominador: $\frac{a}{c} \pm \frac{b}{c} = \frac{a \pm b}{c}$. Con distinto denominador, se reducen a común denominador y después se opera.

Ejemplo 4

Calcula $\frac{1}{2} + \frac{2}{3} - \frac{5}{12}$.

Común denominador 12: $\frac{6}{12} + \frac{8}{12} - \frac{5}{12} = \frac{9}{12} = \frac{3}{4}$.

¡Atención!

No se suman denominadores: $\frac{1}{2} + \frac{1}{3} = \frac{5}{6}$, no $\frac{2}{5}$.

Multiplicación y división

Regla: producto y cociente

$\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = \frac{a \cdot c}{b \cdot d}$. Para dividir se multiplica por la **inversa** de la segunda: $\frac{a}{b} : \frac{c}{d} = \frac{a \cdot d}{b \cdot c}$.

Ejemplo 5

Calcula $\frac{4}{7} : \frac{2}{5}$.

$\frac{4 \cdot 5}{7 \cdot 2} = \frac{20}{14} = \frac{10}{7}$.

Ejemplo 6

Un depósito de 360 litros se vacía: el lunes se gastan $\frac{2}{5}$ y el martes $\frac{1}{3}$ de la capacidad. ¿Cuántos litros quedan?

Lunes: $360 : 5 \cdot 2 = 144$ l. Martes: $360 : 3 = 120$ l. Gastados: 264 l. Quedan $360 - 264 = 96$ l.

Observación

Los números enteros son fracciones de denominador 1. En las operaciones combinadas se mantiene la prioridad: paréntesis, productos y divisiones, sumas y restas.

Fracciones y números mixtos

Definición: número mixto

Un **número mixto** está formado por una parte entera y una fracción propia: $2\frac{3}{4}$ significa $2+\frac{3}{4}$. Para pasar de mixto a fracción impropia, se multiplica el entero por el denominador y se suma el numerador: $2\frac{3}{4}=\frac{2\cdot 4+3}{4}=\frac{11}{4}$.

Ejemplo 7

Expresa $\frac{23}{6}$ como número mixto y $3\frac{2}{5}$ como fracción.

23 : 6 da cociente 3 y resto 5, luego $\frac{23}{6}=3\frac{5}{6}$. Y $3\frac{2}{5}=\frac{3\cdot 5+2}{5}=\frac{17}{5}$.

Operaciones combinadas y problemas con fracciones

Método: resolver un problema con fracciones

1. Lee con calma el enunciado y subraya los datos.
2. Decide si cada fracción es «de la cantidad total» o «de lo que queda».
3. Calcula cada parte dividiendo entre el denominador y multiplicando por el numerador.
4. Comprueba que la suma de las partes es el total.
5. Escribe la respuesta con unidades.

Ejemplo 8

Un ciclista recorre una ruta de 60 km. En la primera etapa hace $\frac{2}{5}$ del total y en la segunda, $\frac{1}{3}$ del total. ¿Cuántos kilómetros le faltan?

Primera etapa: 60 : 5 · 2 = 24 km. Segunda: 60 : 3 = 20 km. Lleva 44 km, luego le faltan 60 − 44 = 16 km, que son $\frac{4}{15}$ del recorrido.

Ejemplo 9

Calcula $\frac{3}{4}+\frac{1}{2}\cdot\frac{5}{3}-1$.

Primero el producto: $\frac{1}{2} \cdot \frac{5}{3} = \frac{5}{6}$. Después, con denominador común 12: $\frac{9}{12} + \frac{10}{12} - \frac{12}{12} = \frac{7}{12}$.

¡Atención! Errores frecuentes

- Sumar numeradores y denominadores: $\frac{1}{2} + \frac{1}{3} \neq \frac{2}{5}$.
- Olvidar simplificar al final o simplificar solo uno de los términos de una suma.
- Al dividir, invertir la primera fracción en lugar de la segunda.
- Confundir «los $\frac{3}{4}$ del total» con «los $\frac{3}{4}$ de lo que queda».

¿Sabías que...?

Los antiguos egipcios, hace más de 3 500 años, solo usaban fracciones con numerador 1, como $\frac{1}{2}$ o $\frac{1}{3}$. Para escribir $\frac{3}{4}$ lo expresaban como $\frac{1}{2} + \frac{1}{4}$. Hoy en la cocina usamos fracciones sin darnos cuenta: «media docena», «un cuarto de kilo» o «tres cuartos de hora».

Fracciones, decimales y porcentajes

Regla: de fracción a decimal

Para pasar una fracción a número decimal se divide el numerador entre el denominador: $\frac{3}{4} = 3 : 4 = 0{,}75$. Un porcentaje es una fracción de denominador 100: $25\% = \frac{25}{100} = \frac{1}{4}$. Así, «el 50 %» es la mitad y «el 10 %» es la décima parte.

Ejemplo 10

Escribe $\frac{7}{8}$ como decimal y como porcentaje, y calcula esa parte de 160 €.

7 : 8 = 0,875 = 87,5 %. De 160 €: 160 : 8 · 7 = 140 €, que coincide con 160 · 0,875 = 140 €.

Ejemplo 11

En una clase de 25 alumnos, 15 llevan gafas. ¿Qué fracción es? ¿Y qué porcentaje?

Es $\frac{15}{25} = \frac{3}{5}$ = 0,6 = 60 %. Se comprueba: el 60 % de 25 es 0,6 · 25 = 15.

Método: ordenar fracciones de forma rápida

1. Si tienen el mismo denominador, se ordenan por el numerador.
2. Si tienen el mismo numerador, es mayor la de menor denominador, porque cuantas más partes se hacen, más pequeñas son.
3. Si no, se reduce a común denominador con el mcm o se pasan a decimales con la calculadora.
4. Comprueba el resultado situándolas sobre la recta numérica.

Fracciones y proporciones en el mercado

En un mercado, el vendedor dice «tres cuartos de kilo de cerezas a 4 € el kilo». Son 0,75 kg y cuestan 0,75 · 4 = 3 €. Cuando una receta dice «un cuarto de litro de leche» son 250 ml. Practica estas conversiones: aparecen cada día y te ayudarán a resolver problemas con soltura.

Propiedad: cantidades y fracciones en la vida diaria

Un tercio de hora son 20 minutos, tres cuartos de hora son 45 minutos y $\frac{1}{5}$ de un euro son 20 céntimos. Para pasar de una fracción de hora a minutos se multiplica por 60.

Fracción de una fracción y problemas «del resto»

En muchos problemas no se toma una fracción del total, sino una fracción de lo que queda después de un primer reparto. Por ejemplo, «gasta la mitad de su paga y después un tercio de lo que le queda». Para resolverlos hay que saber calcular la fracción de una fracción, que es simplemente un producto.

Regla: fracción de una fracción

Para calcular $\frac{a}{b}$ de $\frac{c}{d}$ se multiplican las dos fracciones: $\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = \frac{a \cdot c}{b \cdot d}$. Por ejemplo, la mitad de tres cuartos es $\frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4} = \frac{3}{8}$.

Método: problemas en los que se reparte «lo que queda»

1. Calcula la fracción que queda tras el primer gasto: si se gasta $\frac{1}{2}$, queda $1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$.
2. Calcula la fracción del segundo gasto multiplicando: un tercio de lo que queda es

$\frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{6}$ del total.

3. Suma las fracciones gastadas y réstalas de 1 para saber lo que queda al final.
4. Si conoces el total, multiplica cada fracción por esa cantidad.

Ejemplo 12

Irene recibe 30 € de paga. Gasta $\frac{2}{5}$ en un libro y $\frac{1}{3}$ de lo que le queda en el cine. ¿Cuánto dinero le queda?

Tras comprar el libro le queda $1 - \frac{2}{5} = \frac{3}{5}$ de la paga. En el cine gasta $\frac{1}{3} \cdot \frac{3}{5} = \frac{1}{5}$ de la paga. En total ha gastado $\frac{2}{5} + \frac{1}{5} = \frac{3}{5}$, así que le queda $\frac{2}{5}$ de 30 €, es decir, $30 : 5 \cdot 2 = 12$ €. Comprobación con euros: el libro cuesta 12 €, le quedan 18 €, en el cine gasta 6 € y le quedan 12 €.

¡Atención! «Un tercio del resto» no es «un tercio del total»

Un error muy frecuente es sumar directamente $\frac{2}{5} + \frac{1}{3}$ en el ejemplo anterior. Eso sería correcto si Irene gastara un tercio de toda la paga, pero el enunciado dice «de lo que le queda». Lee con atención a qué cantidad se refiere cada fracción antes de operar.

¿Sabías que...? Las fracciones egipcias

Los antiguos egipcios solo usaban fracciones de numerador 1, como $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{3}$ o $\frac{1}{7}$. Para escribir $\frac{3}{4}$ ponían $\frac{1}{2} + \frac{1}{4}$. En el papiro de Rhind, escrito hace unos 3 600 años, hay tablas enteras para descomponer fracciones de esta forma.

Ejemplo 13

Un depósito está lleno en sus $\frac{3}{4}$ partes. Se gasta $\frac{2}{3}$ de lo que contiene. ¿Qué fracción del depósito queda llena?

Lo que se gasta es $\frac{2}{3}$ de $\frac{3}{4}$, es decir, $\frac{2}{3} \cdot \frac{3}{4} = \frac{6}{12} = \frac{1}{2}$ del depósito. Quedaba $\frac{3}{4}$ y se gasta $\frac{1}{2}$, así que queda $\frac{3}{4} - \frac{2}{4} = \frac{1}{4}$ del depósito. Otra forma: si se gastan dos tercios del contenido, queda un tercio del contenido, y $\frac{1}{3} \cdot \frac{3}{4} = \frac{1}{4}$.

El consejo de Otto

Para comparar rápido, usa los productos cruzados: $\frac{a}{b}$ y $\frac{c}{d}$, compara $a \cdot d$ con $b \cdot c$. Y simplifica siempre antes de multiplicar para trabajar con números pequeños.