Apuntes - Ecuaciones de primer grado

Curso: 1 Eso

Una ecuación es una igualdad con una incógnita. Resolverla es averiguar el valor de esa incógnita que hace cierta la igualdad.

Actividad de introducción: la balanza

Imagina una balanza equilibrada. En un platillo hay una bolsa de x caramelos y 3 caramelos sueltos; en el otro platillo, 11 caramelos. Para saber cuántos caramelos hay en la bolsa, quitas 3 caramelos de cada platillo: la balanza sigue equilibrada y la bolsa tiene 8 caramelos. Resolver una ecuación es exactamente eso: hacer en los dos platillos la misma operación hasta dejar la incógnita sola. Si en cambio la bolsa y 2 caramelos pesan lo mismo que 7 caramelos, la bolsa tiene 5. Y si hay tres bolsas iguales y 4 caramelos frente a 19 caramelos, quitamos 4 y repartimos 15 entre las tres bolsas: cada bolsa tiene 5 caramelos. Con esta idea de equilibrio entenderás por qué se hacen las mismas operaciones en los dos miembros.



Qué es una ecuación

Definición: ecuación

Una **ecuación** es una igualdad algebraica que solo se cumple para ciertos valores de la incógnita. Esos valores son las **soluciones**. Una ecuación de **primer grado** es la que tiene la incógnita elevada a 1, como $3x + 2 = 11$. Los dos lados se llaman **miembros**.

Ejemplo 1

¿Es $x = 3$ solución de $2x + 1 = 7$?

Se sustituye: $2 \cdot 3 + 1 = 7$. La igualdad se cumple, luego sí es solución.

Reglas para resolver

Regla: ecuaciones equivalentes

Regla de la suma: si sumas o restas lo mismo en los dos miembros, la ecuación equivalente tiene la misma solución. **Regla del producto:** si multiplicas o divides los dos miembros por un número distinto de 0, también.

Observación

De estas reglas sale la **transposición**: lo que suma en un miembro pasa restando al otro, y lo que multiplica pasa dividiendo.

Método general

Método: resolver una ecuación de primer grado

1. Quita paréntesis.
2. Quita denominadores multiplicando por el mcm.
3. Pasa los términos con x a un miembro y los números al otro.
4. Reduce términos semejantes.
5. Despeja x: $x = \dfrac{\text{número}}{\text{coeficiente}}$.
6. Comprueba sustituyendo.

Ejemplo 2

Resuelve $3(x-2)+5=2x+7$.

$3x-6+5=2x+7$, luego $3x-1=2x+7$. Pasamos: $3x-2x=7+1$, así que $x=8$. Comprobación: $3\cdot 6+5=23$ y $2\cdot 8+7=23$.

Ejemplo 3

Resuelve $\dfrac{x}{2}+\dfrac{x}{3}=10$.

El mcm de 2 y 3 es 6: $3x+2x=60$, $5x=60$, $x=12$.

Resolución de problemas con ecuaciones

Método: resolver un problema con una ecuación

1. Lee el enunciado y identifica la incógnita.
2. Elige una letra y exprésala con unidades.
3. Plantea la ecuación.
4. Resuélvela.
5. Comprueba en el enunciado y responde con una frase.

Ejemplo 4

La suma de tres números consecutivos es 63. ¿Cuáles son?

Sean x, $x+1$, $x+2$. $3x+3=63$, $x=20$. Los números son 20, 21 y 22.

Ejemplo 5

Pedro tiene 3 años más que el doble de la edad de su hijo. Entre los dos suman 60. ¿Qué edad tiene cada uno?

Hijo: x. Padre: $2x + 3$. $x + 2x + 3 = 60$, $x = 19$. El hijo tiene 19 y el padre 41.

¡Atención!

Al pasar un término al otro miembro, cambia el signo. Y si multiplicas por el mcm, multiplica todos los términos, también los que no tienen denominador.

Estrategia para resolver problemas con ecuaciones

Método: los cinco pasos de Otto

1. **Comprende** el enunciado: ¿qué se pide? Subraya los datos.
2. **Elige la incógnita**: escribe «x = ...» con unidades.
3. **Plantea** la ecuación traduciendo cada frase.
4. **Resuelve** paso a paso.
5. **Comprueba** en el enunciado y responde con una frase.

Ejemplo 5

La suma de tres números consecutivos es 78. ¿Cuáles son?

Si el menor es x, los otros son x + 1 y x + 2. Entonces x + x + 1 + x + 2 = 78; 3x + 3 = 78; x = 25. Los números son 25, 26 y 27.

Ejemplo 6

Una madre tiene el triple de edad que su hijo. Dentro de 6 años, la suma de sus edades será 52. ¿Qué edad tienen hoy?

El hijo tiene x y la madre 3x. Dentro de 6 años: (x + 6) + (3x + 6) = 52; 4x + 12 = 52; x = 10. El hijo tiene 10 años y la madre 30. Comprobación: 16 + 36 = 52.

Ecuaciones con paréntesis y denominadores

Método: ecuaciones con denominadores

1. Calcula el mcm de todos los denominadores.
2. Multiplica los dos miembros por ese mcm, sin olvidar ningún término.
3. Quita los paréntesis aplicando la propiedad distributiva.
4. Pasa los términos con x a un miembro y los números al otro.
5. Divide entre el coeficiente de x y comprueba.

Ejemplo 7

Resuelve $\frac{x}{2} + \frac{x}{3} = 10$.

El mcm de 2 y 3 es 6. Multiplicamos por 6: 3x + 2x = 60; 5x = 60; x = 12. Comprobación: 12/2 + 12/3 = 6 + 4 = 10.

Ejemplo 8

Resuelve $3(x-4) = 2x + 5$.

Quitamos el paréntesis: 3x − 12 = 2x + 5. Pasamos 2x a la izquierda y −12 a la derecha: x = 17. Comprobación: 3·13 = 39 y 2·17 + 5 = 39.

Ejemplo 9

Un bolígrafo cuesta 0,50 € más que un lápiz. Tres lápices y dos bolígrafos cuestan 4 €. ¿Cuánto cuesta cada uno?

Lápiz x; bolígrafo x + 0,5. Entonces 3x + 2(x + 0,5) = 4; 5x + 1 = 4; x = 0,60 €. El bolígrafo cuesta 1,10 €.

Regla: ecuaciones equivalentes

Si sumas, restas, multiplicas o divides los dos miembros por el mismo número (distinto de 0), obtienes una ecuación con la misma solución. Pasar un término al otro miembro cambiándole el signo es lo mismo que sumar su opuesto a los dos lados.

Propiedad: ecuaciones sin solución o con infinitas soluciones

Algunas ecuaciones no tienen una solución única. Por ejemplo, $x + 3 = x + 5$ no tiene solución (3 ≠ 5 siempre), y $2(x+1) = 2x + 2$ se cumple para cualquier valor de x.

¡Atención! Errores frecuentes

- Al pasar un término al otro miembro, no cambiarle el signo.
- Quitar un paréntesis precedido de signo menos sin cambiar todos los signos de dentro: $-(2x-3) = -2x + 3$.
- Olvidar multiplicar todos los términos por el mcm al quitar denominadores.
- No comprobar la solución en el enunciado del problema.

¿Sabías que...?

La palabra «álgebra» viene del libro «Al-jabr» del matemático persa Al-Juarismi (siglo IX), que explicaba cómo «pasar» términos de un miembro a otro de una ecuación. De su nombre procede también la palabra «algoritmo». Los antiguos babilonios ya

resolvían problemas de reparto con ecuaciones hace casi 4 000 años.

Comprobar, interpretar y redactar la solución

Resolver una ecuación no termina cuando encontramos el valor de la incógnita. Un buen trabajo de matemáticas incluye tres pasos más: comprobar que el valor cumple la igualdad, interpretar el resultado en el contexto del problema y escribir una respuesta completa. Estos pasos permiten detectar errores de signo o de transposición que, de otro modo, pasarían desapercibidos.

Método: comprobar una solución

1. Sustituye la incógnita por el valor obtenido en la ecuación original, no en una de las ecuaciones intermedias.
2. Calcula por separado el primer miembro y el segundo miembro.
3. Si obtienes el mismo número en los dos miembros, la solución es correcta. Si no, revisa los pasos uno por uno.

Ejemplo 10

Resuelve $3(x+2)-x=4x-8$ y comprueba la solución.

Quitamos el paréntesis multiplicando el 3 por cada término: $3x+6-x=4x-8$. Reducimos el primer miembro: $2x+6=4x-8$. Pasamos los términos con x a la derecha y los números a la izquierda: $6+8=4x-2x$, es decir, $14=2x$, y dividiendo entre 2 obtenemos $x=7$. Comprobación: el primer miembro vale $3\cdot 9-7=20$ y el segundo $4\cdot 7-8=20$. Los dos miembros coinciden, luego $x=7$ es la solución.

Ejemplo 11

En una clase de 1.º de ESO hay 28 alumnos. Hay 4 chicas más que chicos. ¿Cuántos chicos y cuántas chicas hay?

Llamamos x al número de chicos; entonces hay $x+4$ chicas. La suma es el total de la clase: $x+(x+4)=28$. Resolvemos: $2x+4=28$, $2x=24$, $x=12$. Hay 12 chicos y 16 chicas. Comprobación: $12+16=28$ y $16-12=4$. La solución tiene sentido porque es un número natural de personas.

¡Atención! Soluciones que no tienen sentido

A veces una ecuación tiene solución matemática, pero esa solución no sirve para el problema. Si al calcular el número de personas obtienes $x=7{,}5$ o una edad negativa, el planteamiento es incorrecto o el problema no tiene solución. Pregúntate siempre si el resultado es razonable: el número de entradas debe ser natural, una longitud debe ser positiva y una edad no puede superar los ciento y pico años.

Observación: elegir bien la incógnita

Cuando un problema habla de varias cantidades relacionadas, conviene llamar x a la más pequeña o a aquella a partir de la cual se describen las demás. Así se evitan las fracciones. Por ejemplo, si «Bruno tiene el doble que Ana», es más cómodo llamar x a los cromos de Ana y escribir $2x$ para Bruno.

El consejo de Otto

Haz siempre la comprobación: sustituye la solución en la ecuación original. Si los dos miembros no coinciden, repasa los signos al transponer.