Apuntes - Divisibilidad

Curso: 1 Eso

La divisibilidad estudia cuándo un número cabe exactamente en otro. Con ella simplificarás fracciones y resolverás problemas de repartos y de coincidencias.

Actividad de introducción: los semáforos

En un cruce de Madrid hay dos semáforos de peatones. Uno se pone en verde cada 12 segundos y el otro cada 18. A las 9:00:00 coinciden. ¿Cuándo volverán a ponerse en verde a la vez? Para resolverlo necesitas múltiplos y mínimo común múltiplo. Si en otra situación tienes 24 magdalenas y 36 galletas y quieres hacer bolsas iguales sin que sobre nada, necesitas divisores y máximo común divisor. Estas dos preguntas, tan distintas, son el corazón de este tema.

Múltiplos y divisores

Definición: múltiplo y divisor

Un número a es **múltiplo** de b si $a = b \cdot k$ con k natural. Entonces b es **divisor** de a y la división $a : b$ es exacta. Los múltiplos de 6 son 0, 6, 12, 18, 24...

Propiedad

Todo número tiene infinitos múltiplos, pero un número finito de divisores. El 1 divide a todos y todo número se divide a sí mismo.

Ejemplo 1

Halla todos los divisores de 36.

Se prueban los números hasta 6 y se emparejan: $1 \cdot 36$, $2 \cdot 18$, $3 \cdot 12$, $4 \cdot 9$, $6 \cdot 6$. Divisores: 1, 2, 3, 4, 6, 9, 12, 18, 36.

Criterios de divisibilidad

Regla: criterios de divisibilidad

Un número es divisible entre **2** si acaba en cifra par; entre **3** si la suma de sus cifras es múltiplo de 3; entre **5** si acaba en 0 o 5; entre **9** si la suma de cifras es múltiplo de 9; entre **10** si acaba en 0; entre **11** si la diferencia entre la suma de las cifras en lugar impar y en lugar par es 0 o múltiplo de 11.

Ejemplo 2

¿Es 2 574 divisible entre 2, 3, 9 y 11?

Acaba en 4: sí entre 2. Suma de cifras $2+5+7+4=18$: sí entre 3 y entre 9. Para el 11: $(2+7)-(5+4)=0$: sí. Es divisible entre 2, 3, 9 y 11.

Números primos y compuestos

Definición: número primo

Un número es **primo** si tiene exactamente dos divisores: el 1 y él mismo. Si tiene más de dos divisores es **compuesto**. El 1 no es primo ni compuesto. Los primeros primos son 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29...

Método: saber si un número es primo

1. Calcula aproximadamente su raíz cuadrada.
2. Prueba a dividirlo entre los primos menores o iguales que esa raíz.
3. Si ninguna división es exacta, es primo.

Observación

El 2 es el único primo par. Para saber si 97 es primo basta probar 2, 3, 5 y 7, porque $\sqrt{97}$.

Descomposición en factores primos

Definición: descomposición factorial

Descomponer un número compuesto es escribirlo como producto de factores primos. Esta descomposición es única: $180=2^2\cdot 3^2\cdot 5$.

Método: descomponer un número

1. Divide entre el menor primo posible (2, luego 3, luego 5...).
2. Repite con el cociente hasta llegar a 1.
3. Escribe el producto de los primos con sus exponentes.

Ejemplo 3

Descompón 252.

$252:2=126$, $126:2=63$, $63:3=21$, $21:3=7$, $7:7=1$. Por tanto $252=2^2\cdot 3^2\cdot 7$.

Máximo común divisor y mínimo común múltiplo

Definición: mcd y mcm

El **mcd** de varios números es el mayor de sus divisores comunes. El **mcm** es el menor de sus múltiplos comunes distintos de 0.

Regla: calcular mcd y mcm

Se descompone cada número. El **mcd** es el producto de los factores primos **comunes** con el **menor** exponente. El **mcm** es el producto de los factores comunes y no comunes con el **mayor** exponente.

Ejemplo 4

Calcula mcd y mcm de 24 y 36.

$24 = 2^3 \cdot 3$ y $36 = 2^2 \cdot 3^2$. mcd $= 2^2 \cdot 3 = 12$. mcm $= 2^3 \cdot 3^2 = 72$.

Ejemplo 5

Dos autobuses salen juntos a las 8:00. Uno pasa cada 12 minutos y otro cada 18. ¿Cuándo vuelven a coincidir?

Piden un mínimo común múltiplo: $12 = 2^2 \cdot 3$, $18 = 2 \cdot 3^2$, mcm $= 2^2 \cdot 3^2 = 36$. Coinciden a las 8:36.

Ejemplo 6

Se quieren cortar dos cuerdas de 84 cm y 120 cm en trozos iguales, lo más largos posible y sin sobrar nada. ¿Cuánto mide cada trozo?

Piden un máximo común divisor: $84 = 2^2 \cdot 3 \cdot 7$, $120 = 2^3 \cdot 3 \cdot 5$, mcd $= 2^2 \cdot 3 = 12$. Cada trozo mide 12 cm (7 y 10 trozos).

¡Atención!

Si el problema pide «cuándo vuelven a coincidir» usa el mcm; si pide «repartir en grupos iguales lo más grande posible» usa el mcd. Y el mcd nunca es mayor que el menor de los números.

Cómo aplicar mcd y mcm en problemas

Método: ¿mcd o mcm?

1. Si hay que repartir, dividir o cortar en trozos iguales sin que sobre nada, se usa

el **mcd** (el máximo común divisor).
2. Si hay algo que se repite cada cierto tiempo o cada cierta distancia y queremos saber cuándo coinciden, se usa el **mcm** (el mínimo común múltiplo).
3. Descompón los números en factores primos, aplica la regla y escribe la respuesta con unidades.

Ejemplo 7

Dos farolas parpadean, una cada 8 s y otra cada 12 s. Si ahora parpadean a la vez, ¿cuándo volverán a coincidir?

Es un problema de coincidencias: mcm(8, 12). $8 = 2^3$ y $12 = 2^2 \cdot 3$, luego mcm $= 2^3 \cdot 3 = 24$. Coinciden cada 24 segundos.

Ejemplo 8

Un tablero de 120 cm por 90 cm se corta en cuadrados iguales lo más grandes posible. ¿Cuántos cuadrados salen?

Es un problema de reparto: mcd(120, 90) = 30 cm de lado. Salen $(120 : 30) \cdot (90 : 30) = 4 \cdot 3 = 12$ cuadrados.

Regla: relación entre mcd y mcm

Para dos números a y b se cumple $\mathrm{mcd}(a, b) \cdot \mathrm{mcm}(a, b) = a \cdot b$. Por ejemplo, mcd(24, 36) = 12 y mcm(24, 36) = 72, y $12 \cdot 72 = 864 = 24 \cdot 36$. Si los números son primos entre sí, el mcd es 1 y el mcm es su producto.

Propiedad: números primos entre sí

Dos números son **primos entre sí** si su único divisor común es el 1, aunque ninguno de ellos sea primo. Por ejemplo 8 y 15 son primos entre sí, porque mcd(8, 15) = 1.

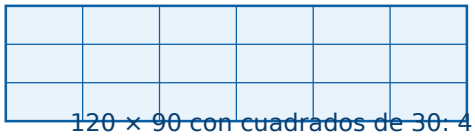
¡Atención! Errores frecuentes

- Confundir divisor con múltiplo: 3 es divisor de 12, pero 12 es múltiplo de 3.
- Pensar que 1 es primo: no lo es, solo tiene un divisor.
- Olvidar los factores no comunes al calcular el mcm, o coger el exponente menor en el mcm (en el mcm se coge el mayor).
- Creer que un número es primo porque no es divisible por 2, 3 o 5: $49 = 7 \cdot 7$ no lo es.

¿Sabías que...?

Hace más de dos mil años, el matemático griego Eratóstenes ideó la «criba» para encontrar números primos: se escriben los números y se tachan los múltiplos de 2, de

3, de 5... Los números que quedan sin tachar son primos. Hoy los primos protegen tus datos: los ordenadores usan primos de cientos de cifras para cifrar mensajes y compras por internet.



120 × 90 con cuadrados de 30: 4

La criba de Eratóstenes y otros recursos

Para reconocer números primos de forma rápida conviene tener a mano la lista de los primos menores que 100. Una manera clásica de obtenerla es la criba de Eratóstenes, un procedimiento que se usa desde la Grecia antigua y que no exige hacer divisiones: basta con tachar múltiplos.

Método: la criba de Eratóstenes

1. Escribe los números del 2 al 100 en una tabla de diez columnas.
2. Rodea el 2, que es primo, y tacha todos sus múltiplos: 4, 6, 8...
3. El primer número sin tachar es el 3: rodéalo y tacha sus múltiplos.
4. Repite con el 5 y con el 7. Como $11 \cdot 11 = 121$ ya es mayor que 100, no hace falta seguir.
5. Los números que quedan sin tachar son los 25 primos menores que 100.

Ejemplo 9

¿Es primo el número 221?

Solo hace falta probar los primos cuyo cuadrado no supere 221, es decir, 2, 3, 5, 7, 11 y 13, porque $17^2 = 289$ ya es mayor. El 221 es impar, sus cifras suman 5 y no termina en 0 ni en 5, así que no es divisible por 2, 3 ni 5. Al dividir entre 7 se obtiene 31 y resto 4; entre 11, 20 y resto 1; entre 13 la división es exacta: $221 = 13 \cdot 17$. Por tanto 221 no es primo, es compuesto.

Ejemplo 10

¿Cuántos divisores tiene 72? Escríbelos todos.

Descomponemos: $72 = 2^3 \cdot 3^2$. Cada divisor se forma eligiendo una potencia de 2 (de 2^0 a 2^3, cuatro opciones) y una potencia de 3 (de 3^0 a 3^2, tres opciones). Hay $4 \cdot 3 = 12$ divisores: 1, 2, 3, 4, 6, 8, 9, 12, 18, 24, 36 y 72. Una buena comprobación es emparejarlos: $1 \cdot 72$, $2 \cdot 36$, $3 \cdot 24$, $4 \cdot 18$, $6 \cdot 12$, $8 \cdot 9$.

¿Sabías que...? Los primos y los mensajes secretos

Cuando compras por internet o envías un mensaje con el móvil, la información viaja cifrada gracias a números primos enormes, de cientos de cifras. Multiplicar dos primos

grandes es fácil para un ordenador, pero descomponer el producto para recuperarlos es tan difícil que llevaría miles de años. La seguridad de tus datos depende, en parte, de lo que estás aprendiendo en este tema.

El consejo de Otto

Si dudas entre mcd y mcm, piensa en el tamaño de la respuesta: el mcd es pequeño (divide), el mcm es grande (múltiplo). Escribe siempre las descomposiciones una debajo de otra.