Soluciones del examen - Vectores en el plano

Curso: 1 Bachillerato Ciencias · Duración: 55 minutos · /20

Solución del ejercicio 1 (4 puntos)

a. Extremo menos origen: . Su módulo es . El vector va de A a B.

b.  y $2\vec{v} = (-4, 2)$. Restando coordenada a coordenada: . Atención al signo al restar: $-2\vec{v} = (4, -2)$.

c. El punto medio es la media de las coordenadas: $M = \left(\frac{1+4}{2}, \frac{-2+2}{2}\right) = \left(\frac{5}{2}, 0\right)$. Si A' es el simétrico de A respecto de B, B es el punto medio de AA': $A' = 2B - A = (8 - 1,\ 4 + 2) = (7, 6)$. Comprobación: el punto medio de $A(1, -2)$ y $A'(7, 6)$ es $(4, 2) = B$.

Solución del ejercicio 2 (3 puntos)

a. Forman base si no son paralelos: $1 \cdot 1 - (-1) \cdot 2 = 1 + 2 = 3 \neq 0$, así que sus coordenadas no son proporcionales y forman una base del plano. Equivale a que el determinante formado por sus coordenadas no sea cero.

b. Buscamos x, y con $x(1, -1) + y(2, 1) = (1, 5)$: $x + 2y = 1$ y $-x + y = 5$. Sumando las dos ecuaciones, $3y = 6$, luego $y = 2$ y $x = 1 - 4 = -3$. Así $\vec{w} = -3\vec{a} + 2\vec{b}$. Comprobación: $(-3, 3) + (4, 2) = (1, 5)$. Los coeficientes -3 y 2 son las coordenadas de $\vec{w}$ en la base $\{\vec{a}, \vec{b}\}$.

Solución del ejercicio 3 (4 puntos)

a. $\vec{u} \cdot \vec{v} = 2 \cdot (-1) + 1 \cdot 3 = -2 + 3 = 1$. Con $|\vec{u}| = \sqrt{5}$ y $|\vec{v}| = \sqrt{10}$: $\cos\alpha = \frac{1}{\sqrt{50}} \approx 0{,}1414$, luego $\alpha \approx 81{,}87°$, casi perpendiculares. Aquí $|\vec{u}| = \sqrt{4+1}$ y $|\vec{v}| = \sqrt{1+9}$.

b. Dos vectores son perpendiculares si su producto escalar es 0: $2m + 1 \cdot (-4) = 0$, luego $m = 2$. Comprobación: $(2, -4) \cdot (2, 1) = 4 - 4 = 0$.

c. La proyección escalar de $\vec{v}$ sobre $\vec{u}$ es $\frac{\vec{u} \cdot \vec{v}}{|\vec{u}|} = \frac{1}{\sqrt{5}} = \frac{\sqrt{5}}{5} \approx 0{,}45$: positiva y pequeña,

porque el ángulo es agudo y cercano a 90°. Es la longitud con signo de la sombra de $\vec{v}$ sobre la dirección de $\vec{u}$.

Solución del ejercicio 4 (4 puntos)

a. En el paralelogramo $ABCD$ los lados opuestos son vectores iguales:

. Por tanto,

. Comprobación:

.

b. Con y , el área es el valor absoluto del determinante:

$S = |4 \cdot 3 - 2 \cdot 1| = 10$ unidades cuadradas. Comprobación: y la altura sobre ese lado es $\frac{10}{\sqrt{20}} = \sqrt{5}$, con $\sqrt{20} \cdot \sqrt{5} = 10$.

c. Sería un rectángulo si los lados fueran perpendiculares.

, así que no es un rectángulo. El ángulo entre los lados cumple $\cos\alpha = \frac{10}{\sqrt{20}\sqrt{10}} \approx 0{,}707$, es decir, $\alpha = 45^\circ$.

Solución del ejercicio 5 (5 puntos)

a. Sumamos la velocidad de los motores $(0, 3)$ y la de la marea $(2, 0)$: $\vec{v} = (2, 3)$. Su módulo es $\sqrt{4+9} = \sqrt{13} \approx 3{,}61$ m/s, y el ángulo con la perpendicular cumple $\tan\theta = \frac{2}{3}$, es decir, $\theta \approx 33{,}69^\circ$.

b. Solo la componente perpendicular, 3 m/s, sirve para cruzar: $t = \frac{60}{3} = 20$ s. Mientras tanto, la marea lo desplaza $2 \cdot 20 = 40$ m.

c. Para compensar la marea, la componente paralela de los motores debe ser -2: la velocidad propia es $(-2, y)$ con módulo 3, así que $4 + y^2 = 9$ e $y = \sqrt{5} \approx 2{,}24$ m/s. Tarda $\frac{60}{\sqrt{5}} \approx 26{,}83$ s.