Apuntes - Vectores en el plano

Curso: 1 Bachillerato Ciencias

En este tema aprenderás: vectores en el plano, operaciones, producto escalar y aplicaciones. Cada idea va en un cuadro de color, con ejemplos resueltos paso a paso.

Actividad de introducción: no basta con saber cuánto

Un avión vuela a 800 km/h. ¿Dónde estará dentro de una hora? Con ese dato no se puede saber: hace falta conocer también hacia dónde vuela. Las magnitudes como la velocidad, la fuerza o el desplazamiento necesitan un número (su tamaño), una dirección y un sentido; se llaman **magnitudes vectoriales** y se representan con flechas: los **vectores**. Si además sopla viento, la velocidad real del avión es la «suma» de su velocidad y la del viento, y esa suma no se hace sumando los números, sino con la regla del paralelogramo. En este tema aprenderás a trabajar con vectores en coordenadas: sumarlos, multiplicarlos por un número, expresarlos en una base, calcular su módulo y el ángulo que forman con el producto escalar, y aplicarlos a problemas de geometría y de física.

Vectores en el plano

Definición: vector fijo

Un **vector fijo** $\overrightarrow{AB}$ es un segmento orientado con origen A y extremo B. Tiene **módulo** (longitud), **dirección** y **sentido**. Un **vector libre** es el conjunto de todos los vectores fijos con el mismo módulo, dirección y sentido; se describe por sus **componentes**. Si $A(x_1, y_1)$ y $B(x_2, y_2)$, entonces $\overrightarrow{AB} = (x_2 - x_1, y_2 - y_1)$. Por ejemplo, con $A(1, 2)$ y $B(4, -1)$, $\overrightarrow{AB} = (3, -3)$.

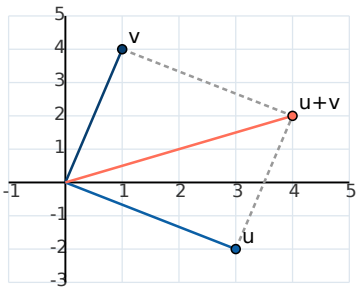
Definición: módulo

El **módulo** de $\vec{u} = (a, b)$ es $|\vec{u}| = \sqrt{a^2 + b^2}$. Un **vector unitario** tiene módulo 1; el unitario de la misma dirección y sentido que $\vec{u}$ es $\frac{\vec{u}}{|\vec{u}|}$. El **punto medio** de A y B es $M = \left(\frac{x_1+x_2}{2}, \frac{y_1+y_2}{2}\right)$.

Operaciones

Regla

La suma y la resta se hacen componente a componente, y el producto por un número k multiplica cada componente: si $\vec{u} = (3, -2)$ y $\vec{v} = (1, 4)$, entonces $\vec{u} + \vec{v} = (4, 2)$, $\vec{u} - \vec{v} = (2, -6)$ y $2\vec{u} - 3\vec{v} = (3, -16)$. Gráficamente, la suma es la diagonal del paralelogramo.



Definición: paralelos

Dos vectores son **paralelos** (linealmente dependientes) si uno es múltiplo del otro: $(a, b) \parallel (c, d) \iff \frac{a}{c} = \frac{b}{d} \iff ad - bc = 0$. Dos vectores no paralelos forman una **base** de $\mathbb{R}^2$, y cualquier vector se escribe como combinación lineal de ellos. Por ejemplo, $(8, 1) = 3(2, 1) + 2(1, -1)$.

Producto escalar

Definición: producto escalar

El **producto escalar** de $\vec{u} = (a, b)$ y $\vec{v} = (c, d)$ es el número $\vec{u} \cdot \vec{v} = ac + bd = |\vec{u}||\vec{v}| \cos\theta$, con θ el ángulo que forman. Propiedades: es conmutativo, $\vec{u} \cdot \vec{u} = |\vec{u}|^2$ y se distribuye respecto de la suma. De la segunda expresión se deduce:

- El **ángulo**: $\cos\theta = \frac{\vec{u} \cdot \vec{v}}{|\vec{u}||\vec{v}|}$.
- **Perpendicularidad**: $\vec{u} \perp \vec{v} \iff \vec{u} \cdot \vec{v} = 0$.
- La **proyección ortogonal** de $\vec{u}$ sobre $\vec{v}$ es el vector $\frac{\vec{u} \cdot \vec{v}}{|\vec{v}|^2}\,\vec{v}$.

Ejemplo 1

Para $\vec{u} = (1, 2)$ y $\vec{v} = (3, -1)$: $\vec{u} \cdot \vec{v} = 3 - 2 = 1$, $|\vec{u}| = \sqrt{5}$, $|\vec{v}| = \sqrt{10}$; $\cos\theta = \frac{1}{\sqrt{50}} \approx 0{,}1414$ y $\theta \approx 81{,}87^\circ$.

Ejemplo 2

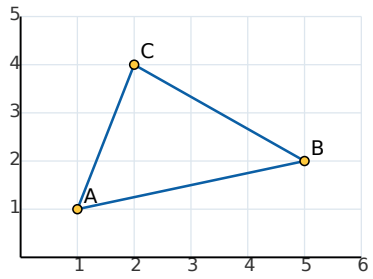
Un vector perpendicular a (a, b) es $(-b, a)$.

Para $(3, 4)$, los unitarios perpendiculares son $\pm\left(-\frac{4}{5}, \frac{3}{5}\right)$.

Ejemplo 3

En el triángulo $A(1,1)$, $B(5,2)$, $C(2,4)$ el ángulo en A se obtiene con $\overrightarrow{AB}$ y $\overrightarrow{AC}$: $\cos A = \frac{7}{\sqrt{17}\sqrt{10}} \approx 0{,}537$, luego $A \approx 57{,}5°$.

El área es $\frac{1}{2}|4 \cdot 3 - 1 \cdot 1| = \frac{11}{2}$.



Cómo se hace: calcular el ángulo entre dos vectores

1. Calcula el producto escalar $\vec{u} \cdot \vec{v} = u_1v_1 + u_2v_2$.
2. Calcula los módulos $|\vec{u}|$ y $|\vec{v}|$.
3. Aplica $\cos\alpha = \frac{\vec{u}\cdot\vec{v}}{|\vec{u}|\,|\vec{v}|}$ y obtén α con la calculadora.

Aplicaciones

Regla

El trabajo de una fuerza $\vec{F}$ en un desplazamiento $\vec{d}$ es $W = \vec{F} \cdot \vec{d}$. Con $\vec{F} = (30, 40)$ N y $\vec{d} = (5, 0)$ m, $W = 150$ J. Las velocidades se suman como vectores: un barco que avanza con $(4, 0)$ km/h en una corriente $(0, 3)$ km/h lleva la velocidad $(4, 3)$, de módulo 5 km/h.

¡Atención! Errores frecuentes

- Confundir el producto escalar (da un número) con un vector.
- Restar mal las coordenadas: $\overrightarrow{AB}$, no $A - B$.
- Escribir $|\vec{u} + \vec{v}| = |\vec{u}| + |\vec{v}|$: solo se cumple si tienen la misma dirección y sentido.
- Olvidar dividir entre $|\vec{v}|$ al normalizar.

Vectores libres y equipolencia

Definición: vectores equipolentes y vector libre

Dos vectores fijos son **equipolentes** si tienen el mismo módulo, la misma dirección y el mismo sentido; gráficamente, sus extremos forman un paralelogramo. Todos los vectores fijos equipolentes entre sí representan un mismo **vector libre**, que se escribe $\vec{u}$ y que puede dibujarse con origen en cualquier punto. Las coordenadas de $\vec{u}$ se calculan restando las del origen a las del extremo, y dos vectores fijos son equipolentes si y solo si tienen las mismas coordenadas.

Bases y coordenadas

Propiedad: bases del plano

Dos vectores $\vec{a}$ y $\vec{b}$ no paralelos forman una **base** del plano: todo vector $\vec{w}$ se escribe de forma única como $\vec{w} = x\vec{a} + y\vec{b}$, y (x, y) son sus coordenadas en esa base. Una base es **ortogonal** si sus vectores son perpendiculares, y **ortonormal** si además tienen módulo 1. La base canónica, $\vec{i} = (1, 0)$ y $\vec{j} = (0, 1)$, es ortonormal, y es la que se usa por defecto. Para saber si dos vectores forman base basta con comprobar que $a_1 b_2 - a_2 b_1 \neq 0$.

Ejemplo 4

Expresa $\vec{w} = (4, 7)$ en la base formada por $\vec{a} = (2, 1)$ y $\vec{b} = (0, 3)$.

Planteamos $x(2, 1) + y(0, 3) = (4, 7)$, es decir, $2x = 4$ y $x + 3y = 7$. De la primera, $x = 2$; sustituyendo, $3y = 5$ e $y = \frac{5}{3}$. Así, $\vec{w} = 2\vec{a} + \frac{5}{3}\vec{b}$, y sus coordenadas en la base $\{\vec{a}, \vec{b}\}$ son $\left(2, \frac{5}{3}\right)$.

Puntos de un segmento

Cómo se hace: punto medio, simétrico y división de un segmento

1. Punto medio de A y B: $M = \left(\frac{a_1+b_1}{2}, \frac{a_2+b_2}{2}\right)$.
2. Simétrico de A respecto de P: como P es el punto medio de A y A', $A' = 2P - A$.
3. Para dividir AB en n partes iguales, se suma a A el vector $\boldsymbol{n}$, con $k = 1, \ldots, n-1$.

4. El baricentro de un triángulo es $G = \frac{A+B+C}{3}$ y está a dos tercios de cada mediana desde el vértice.

Ejemplo 5

Halla el simétrico de $A(3,-1)$ respecto de $P(5,2)$.

$A' = 2P - A = (10-3,\ 4-(-1)) = (7,5)$. Comprobación: el punto medio de $A(3,-1)$ y $A'(7,5)$ es $\left(\frac{10}{2}, \frac{4}{2}\right) = (5,2) = P$.

Propiedades del producto escalar

Propiedad: propiedades y consecuencias

El producto escalar es conmutativo, $\vec{u}\cdot\vec{v} = \vec{v}\cdot\vec{u}$; distributivo, $\vec{u}\cdot(\vec{v}+\vec{w}) = \vec{u}\cdot\vec{v} + \vec{u}\cdot\vec{w}$; y cumple $(k\vec{u})\cdot\vec{v} = k(\vec{u}\cdot\vec{v})$. Además, $\vec{u}\cdot\vec{u} = |\vec{u}|^2$. Su signo informa del ángulo: positivo si es agudo, cero si es recto y negativo si es obtuso. Dados $\vec{u} = (a,b)$, los vectores $(-b,a)$ y $(b,-a)$ son perpendiculares a $\vec{u}$ y tienen su mismo módulo.

Ejemplo 6

Calcula el ángulo que forman $\vec{u} = (1,2)$ y $\vec{v} = (-3,1)$ y la proyección de $\vec{u}$ sobre $\vec{v}$.

El producto escalar es $\vec{u}\cdot\vec{v} = -3+2 = -1$, negativo, así que el ángulo es obtuso. Los módulos son $|\vec{u}| = \sqrt{5}$ y $|\vec{v}| = \sqrt{10}$, de modo que $\cos\alpha = \frac{-1}{\sqrt{50}} \approx -0{,}1414$ y $\alpha \approx 98{,}13^\circ$. La proyección escalar de $\vec{u}$ sobre $\vec{v}$ es $\frac{-1}{\sqrt{10}} \approx -0{,}32$: la «sombra» de $\vec{u}$ cae en sentido contrario a $\vec{v}$.

Demostraciones con vectores

Cómo se hace: demostrar propiedades geométricas con vectores

1. Traduce la propiedad al lenguaje vectorial: «paralelos» es proporcionales, «perpendiculares» es producto escalar nulo y «iguales» es mismo módulo.
2. Escribe los vectores que intervienen a partir de los lados de la figura.
3. Opera usando las propiedades de la suma y del producto escalar.
4. Interpreta el resultado obtenido en términos geométricos.

Ejemplo 7

Demuestra que las diagonales de un rombo son perpendiculares.

Sean $\vec{u}$ y $\vec{v}$ los vectores de dos lados consecutivos del rombo, con $|\vec{u}| = |\vec{v}|$ porque

todos sus lados son iguales. Las diagonales son $\vec{u}+\vec{v}$ y $\vec{u}-\vec{v}$. Su producto escalar es $(\vec{u}+\vec{v})\cdot(\vec{u}-\vec{v}) = |\vec{u}|^2 - |\vec{v}|^2 = 0$. Por tanto, las diagonales son perpendiculares. El mismo cálculo prueba que, en un paralelogramo cualquiera, las diagonales son perpendiculares solo si es un rombo.

Vectores en la física

Observación: fuerzas y velocidades

Las fuerzas que actúan sobre un cuerpo se suman como vectores; si la suma es el vector nulo, el cuerpo está en **equilibrio**. Las velocidades también se componen: la velocidad de un barco respecto de la orilla es la suma de su velocidad respecto del agua y de la velocidad de la corriente. Y el **trabajo** de una fuerza es el producto escalar de la fuerza por el desplazamiento: solo trabaja la componente de la fuerza en la dirección del movimiento.

Ejemplo 8

Sobre una caja actúan $\vec{F}_1 = (12, 5)$ N y $\vec{F}_2 = (-4, 10)$ N. ¿Qué fuerza hay que añadir para que quede en equilibrio? ¿Cuál es su módulo?

La resultante es $\vec{F}_1 + \vec{F}_2 = (8, 15)$ N, de módulo $\sqrt{64+225} = \sqrt{289} = 17$ N. Para que la suma total sea el vector nulo hay que añadir la fuerza opuesta, $\vec{F}_3 = (-8, -15)$ N, que también mide 17 N. Observa que $|\vec{F}_1| = 13$ N y $|\vec{F}_2| = \sqrt{116} \approx 10{,}77$ N: la resultante, de 17 N, es menor que la suma de los módulos, $23{,}77$ N, porque las fuerzas no tienen la misma dirección.

Observación: el ángulo entre dos fuerzas

Cuanto mayor es el ángulo entre dos fuerzas, menor es su resultante: si tienen la misma dirección y sentido, la resultante mide la suma de los módulos; si son opuestas, la diferencia.

¡Atención! módulos y coordenadas

El módulo de una suma no es la suma de los módulos: $|(3,0)+(0,4)| = 5$, no 7. Al calcular $\overrightarrow{AB}$, resta siempre «extremo menos origen»: $B - A$, no $A - B$. Y no confundas el producto escalar, que da un número, con el producto de un número por un vector, que da otro vector.

¿Sabías que? De las flechas de Stevin al cálculo vectorial

El ingeniero flamenco Simon Stevin ya usaba en 1586 la regla del paralelogramo para componer fuerzas. Sin embargo, el cálculo con vectores no se desarrolló hasta el siglo XIX, gracias a Hamilton, Grassmann y Gibbs, y hoy es imprescindible en física, en ingeniería y en los gráficos de los videojuegos. Cada vez que un personaje se mueve en la pantalla, el ordenador suma vectores de posición y velocidad; y cada vez que se calcula cómo ilumina una lámpara una superficie, se usa el producto escalar entre la dirección de la luz y la perpendicular a la superficie.

El consejo de Otto

Producto escalar cero significa vectores perpendiculares: es la forma más rápida de comprobar un ángulo recto.