Ejercicios - Vectores en el plano

Curso: 1 Bachillerato Ciencias · 20

Se debe mostrar el desarrollo de cada ejercicio.

Ejercicio 1

Ejercicio 1 – Vectores fijos y libres

Dados los puntos $A(1,2)$, $B(4,6)$ y $C(-2,0)$:

a. Calcula las coordenadas del vector $\overrightarrow{AB}$ y su módulo.

b. Escribe las coordenadas del vector opuesto, $\overrightarrow{BA}$.

c. Halla el punto D tal que $\overrightarrow{CD} = \overrightarrow{AB}$.

d. ¿Qué figura forman A, B, D y C? Justifícalo.

Ejercicio 2

Ejercicio 2 – Operaciones con vectores

Sean $\vec{u} = (2,-1)$ y $\vec{v} = (-3,4)$.

a. Calcula $\vec{u} + \vec{v}$ y $2\vec{u} - 3\vec{v}$.
b. Calcula $|\vec{u}|$ y $|\vec{v}|$.
c. Halla el vector unitario con la dirección y el sentido de $\vec{v}$.
d. Comprueba que $|\vec{u} + \vec{v}| \leq |\vec{u}| + |\vec{v}|$.

Ejercicio 3

Ejercicio 3 – Combinación lineal y base

Dos vectores no paralelos forman una base del plano: cualquier otro vector se escribe como combinación lineal de ellos.

a. Comprueba que $\vec{a} = (1,2)$ y $\vec{b} = (3,-1)$ forman una base.

b. Escribe $\vec{w} = (7,0)$ como combinación lineal de $\vec{a}$ y $\vec{b}$.

c. ¿Forman base $(2,4)$ y $(-1,-2)$? Justifícalo.

d. ¿Cuáles son las coordenadas de $\vec{w}$ en la base $\{\vec{a}, \vec{b}\}$?

Ejercicio 4

Ejercicio 4 – Vectores paralelos y puntos alineados

Dos vectores son paralelos si sus coordenadas son proporcionales.

a. Halla k para que $\vec{u} = (k, 6)$ y $\vec{v} = (2, 3)$ sean paralelos.
b. Comprueba si $A(1, 1)$, $B(3, 4)$ y $C(7, 10)$ están alineados.
c. Halla m para que $P(0, m)$, $A(1, 1)$ y $B(3, 4)$ estén alineados.
d. ¿Son paralelos $(4, -6)$ y $(-6, 9)$?

Ejercicio 5

Ejercicio 5 – Producto escalar y ángulos

El producto escalar es $\vec{u} \cdot \vec{v} = u_1 v_1 + u_2 v_2 = |\vec{u}||\vec{v}| \cos \alpha$.

a. Calcula $\vec{u} \cdot \vec{v}$ para $\vec{u} = (3, 4)$ y $\vec{v} = (5, -2)$.
b. Calcula el ángulo que forman.
c. Escribe un vector perpendicular a $\vec{u}$ con su mismo módulo.
d. Halla k para que $(k, 2)$ sea perpendicular a $(3, -6)$.

Ejercicio 6

Ejercicio 6 – Proyección de un vector

La proyección de $\vec{u}$ sobre $\vec{v}$ mide la «sombra» de $\vec{u}$ sobre la dirección de $\vec{v}$: su longitud con signo es $\dfrac{\vec{u} \cdot \vec{v}}{|\vec{v}|}$.

a. Calcula la proyección escalar de $\vec{u} = (4, 3)$ sobre $\vec{v} = (3, 4)$.
b. Calcula el vector proyección.
c. Calcula la componente de $\vec{u}$ perpendicular a $\vec{v}$ y comprueba que es perpendicular.
d. ¿Qué signo tiene la proyección si el ángulo es obtuso?

Ejercicio 7

Ejercicio 7 – La nueva fuente de la plaza

En el plano de una ciudad, con unidades de 100 m, el ayuntamiento está en $A(2, 3)$ y la estación en $B(8, 7)$. Se quiere poner una fuente en el punto medio y dos bancos que dividan el paseo AB en tres partes iguales.

a. Calcula la posición de la fuente.
b. Calcula la posición de los dos bancos.
c. Calcula el simétrico de A respecto de B, donde se construirá un aparcamiento.
d. Calcula la longitud del paseo en metros.

Ejercicio 8

Ejercicio 8 – Cruzar el río

Una piragüista quiere cruzar el río Sella, de 80 m de anchura. Rema con una velocidad de 4 m/s perpendicular a la orilla, y la corriente la arrastra a 1,5 m/s paralelamente a la orilla. Tomamos los ejes con X en la dirección de la corriente.

a. Escribe los vectores velocidad de la piragua respecto del agua y de la corriente, y calcula la velocidad resultante.
b. Calcula el módulo de la velocidad resultante y el ángulo que forma con la perpendicular a la orilla.
c. ¿Cuánto tarda en cruzar y cuántos metros la desplaza la corriente río abajo?
d. ¿Hacia dónde debe orientar la piragua, con la misma velocidad de 4 m/s, para llegar justo enfrente? ¿Cuánto tardaría?

Ejercicio 9

Ejercicio 9 – El trabajo al empujar el carro

En física, el trabajo de una fuerza constante $\vec{F}$ al producir un desplazamiento $\vec{d}$ es el producto escalar $W = \vec{F} \cdot \vec{d}$, en julios si la fuerza está en newtons y el desplazamiento en metros. En un supermercado, Pablo empuja un carro con una fuerza de 50 N que forma 30° con el suelo, y lo desplaza 20 m en horizontal.

a. Escribe $\vec{F}$ y $\vec{d}$ en coordenadas.
b. Calcula el trabajo con las coordenadas.
c. Calcula el trabajo con la fórmula $W = |\vec{F}||\vec{d}|\cos\alpha$ y compara.
d. ¿Qué trabajo haría una fuerza perpendicular al desplazamiento? Interprétalo.

Ejercicio 10

Ejercicio 10 – El vuelo de un dron

Un fotógrafo programa un dron para tomar imágenes de un parque natural de Asturias. Despega del punto $O(0,0)$, se desplaza según el vector $\vec{a} = (300, 400)$ y después según $\vec{b} = (-100, 200)$ (en metros).

a. Calcula la posición final del dron.
b. Calcula la distancia entre el punto de despegue y el punto final.
c. Calcula la distancia total recorrida y compárala con la anterior.
d. ¿Qué vector debe seguir el dron para volver al punto de despegue en línea recta?

Ejercicio 11

Ejercicio 11 – El huerto en forma de paralelogramo

Un huerto urbano de Barcelona tiene forma de paralelogramo $ABCD$. En el plano, en metros, tres vértices son $A(1,1)$, $B(5,2)$ y $C(6,5)$.

a. Halla el cuarto vértice D sabiendo que .

b. Comprueba que las diagonales se cortan en su punto medio.

c. Calcula el área con $S = |u_1 v_2 - u_2 v_1|$, siendo y .

d. ¿Es un rectángulo? Justifícalo con el producto escalar.

Ejercicio 12

Ejercicio 12 – Los ángulos de una parcela

Una parcela triangular en una urbanización de Castellón tiene vértices $A(0,0)$, $B(4,0)$ y $C(1,3)$, en decámetros. El constructor necesita los ángulos para colocar la valla.

a. Calcula los vectores , , y .

b. Calcula los ángulos en A y en B con el producto escalar.
c. Deduce el ángulo en C.
d. Calcula el perímetro de la parcela en metros.

Ejercicio 13

Ejercicio 13 – La lámpara colgante

Una lámpara de 80 N de peso cuelga del techo de un salón mediante dos cables. En equilibrio, la suma de todas las fuerzas es el vector nulo. Las tensiones de los cables son $\vec{T}_1 = (-30, 40)$ y $\vec{T}_2 = (30, 40)$, en newtons.

a. Escribe el vector peso y comprueba que la lámpara está en equilibrio.
b. Calcula el módulo de cada tensión.
c. Calcula el ángulo que forma cada cable con la vertical.
d. Calcula el ángulo entre los dos cables con el producto escalar.

Ejercicio 14

Ejercicio 14 – El ángulo de tiro

En un campo de fútbol tomamos un sistema de referencia con origen en el centro de la portería y el eje Y sobre la línea de gol. Los postes están en $(0, -3{,}66)$ y $(0, 3{,}66)$, en metros. El ángulo de tiro es el ángulo con el que un jugador ve la portería.

a. Un delantero está en $P(16, 0)$, en el borde del área y frente a la portería. Calcula los vectores de P a cada poste.
b. Calcula su ángulo de tiro con el producto escalar.

c. Otro jugador está en $Q(16, 8)$. Calcula su ángulo de tiro.
d. ¿Quién tiene más opciones de marcar desde el punto de vista geométrico?

Ejercicio 15

Ejercicio 15 – ¿Es un rectángulo el solar?

Una inmobiliaria de Valencia vende un solar con forma de cuadrilátero. En el plano catastral, con unidades de 10 m, sus vértices son $A(1, 2)$, $B(5, 4)$, $C(4, 6)$ y $D(0, 4)$. El anuncio dice que es «un solar rectangular de 1 000 m²». Un comprador desconfiado quiere comprobarlo.

a. Calcula los vectores , , y .
b. Demuestra que $ABCD$ es un paralelogramo.
c. Demuestra que tiene un ángulo recto y deduce que es un rectángulo.
d. Comprueba que las diagonales tienen la misma longitud.
e. Calcula el área real en metros cuadrados. ¿Es correcto el anuncio? ¿Es un cuadrado?

Ejercicio 16

Ejercicio 16 – El avión y el viento

Una avioneta que vuela de Madrid a una ciudad situada 600 km al norte tiene una velocidad respecto del aire de 250 km/h. Ese día sopla viento del oeste a 50 km/h, es decir, hacia el este. Tomamos el eje X hacia el este y el eje Y hacia el norte.

a. Si el piloto apunta hacia el norte, ¿cuál es el vector velocidad respecto del suelo? Calcula su módulo.
b. ¿Cuántos grados se desvía hacia el este?
c. ¿Hacia dónde debe apuntar el piloto para que la avioneta avance exactamente hacia el norte? Da el ángulo con el norte.
d. Con esa corrección, ¿cuál es la velocidad respecto del suelo y cuánto dura el viaje?
e. Explica por qué el viento lateral alarga el viaje aunque no sople en contra.

Ejercicio 17

Ejercicio 17 – Los movimientos del robot

Un robot de una fábrica de Zaragoza solo puede moverse en dos direcciones: el movimiento $\vec{u} = (3, 1)$, que cuesta 2 céntimos de energía, y el movimiento $\vec{v} = (1, 2)$, que cuesta 3 céntimos. Puede hacer cada movimiento las veces que quiera, también hacia atrás (con números negativos), y el coste se cuenta igual. Debe llevar una pieza desde $(0, 0)$ hasta $(10, 5)$.

a. Justifica que $\vec{u}$ y $\vec{v}$ forman una base.

b. Halla cuántas veces debe hacer cada movimiento para llegar a $(10, 5)$.
c. Calcula el coste del trayecto.
d. Calcula la distancia en línea recta y la longitud del trayecto real del robot.
e. ¿Podría llegar al punto $(4, 8)$ con un número entero de movimientos? Justifícalo.

Ejercicio 18

Ejercicio 18 – El punto de encuentro

Tres amigos viven en $A(2, 1)$, $B(8, 3)$ y $C(5, 8)$, en un plano de su barrio con unidades de 100 m. Quieren quedar en el baricentro G del triángulo, que es el punto donde se cortan las medianas, y se calcula como $G = \frac{A+B+C}{3}$.

a. Calcula las coordenadas de G.
b. Calcula el punto medio M del lado BC y la longitud de la mediana AM.
c. Comprueba que .
d. Calcula la distancia de cada amigo al baricentro. ¿Es el punto más justo para quedar?
e. Propón otro criterio para elegir el punto de encuentro.

Ejercicio 19

Ejercicio 19 – El teorema del coseno con vectores

Sean $\vec{u}$ y $\vec{v}$ dos vectores con $|\vec{u}| = 3$, $|\vec{v}| = 5$ que forman un ángulo de $60°$.

a. Calcula $\vec{u} \cdot \vec{v}$.
b. Usa que $|\vec{w}|^2 = \vec{w} \cdot \vec{w}$ para demostrar que $|\vec{u} + \vec{v}|^2 = |\vec{u}|^2 + |\vec{v}|^2 + 2\,\vec{u} \cdot \vec{v}$.
c. Calcula $|\vec{u} + \vec{v}|$ y $|\vec{u} - \vec{v}|$.
d. Relaciona el resultado de $|\vec{u} - \vec{v}|$ con el teorema del coseno.

Ejercicio 20

Ejercicio 20 – Desafío: perpendicularidad

Usa el producto escalar para resolver estos problemas.

a. Halla los vectores de módulo 10 perpendiculares a $(3, 4)$.
b. Halla los puntos P del eje X desde los que el segmento de extremos $A(1, 3)$ y $B(5, 1)$ se ve con un ángulo recto.
c. Comprueba uno de los resultados de b) con el teorema de Pitágoras.
d. Interpreta geométricamente: ¿sobre qué circunferencia están esos puntos?