Soluciones - Vectores en el plano

Curso: 1 Bachillerato Ciencias

Solución del ejercicio 1

a. Las coordenadas de un vector son las del extremo menos las del origen: [illegible]. Su módulo es [illegible].

b. El opuesto cambia el signo de las dos coordenadas: [illegible]. Tiene el mismo módulo y la misma dirección, pero sentido contrario.

c. Si [illegible], entonces [illegible].

d. Como [illegible], los segmentos AB y CD son paralelos, de la misma longitud y con el mismo sentido: el cuadrilátero $ABDC$ es un paralelogramo.

Solución del ejercicio 2

a. Se opera coordenada a coordenada: $\vec{u}+\vec{v}=(2-3,\,-1+4)=(-1,3)$. Para la combinación, $2\vec{u}=(4,-2)$ y $3\vec{v}=(-9,12)$, así que $2\vec{u}-3\vec{v}=(4+9,\,-2-12)=(13,-14)$.

b. $|\vec{u}|=\sqrt{4+1}=\sqrt{5}\approx 2{,}24$ y $|\vec{v}|=\sqrt{9+16}=5$.

c. Dividimos $\vec{v}$ entre su módulo: $\frac{\vec{v}}{|\vec{v}|}=\left(-\frac{3}{5},\frac{4}{5}\right)$. Comprobación: $\sqrt{\frac{9}{25}+\frac{16}{25}}=1$.

d. $|\vec{u}+\vec{v}|=\sqrt{1+9}=\sqrt{10}\approx 3{,}16$ y $|\vec{u}|+|\vec{v}|\approx 2{,}24+5=7{,}24$. Se cumple la desigualdad triangular: un lado de un triángulo nunca supera la suma de los otros dos.

Solución del ejercicio 3

a. Dos vectores forman base si no son paralelos, es decir, si sus coordenadas no son proporcionales: $\frac{1}{3}\neq\frac{2}{-1}$. Equivalentemente, $1\cdot(-1)-2\cdot 3=-7\neq 0$.

b. Buscamos x, y con $x(1,2)+y(3,-1)=(7,0)$. Igualando coordenadas: $x+3y=7$ y $2x-y=0$. De la segunda, $y=2x$; sustituyendo, $7x=7$, luego $x=1$ e $y=2$. Así $\vec{w}=\vec{a}+2\vec{b}$.

c. No forman base: $(2,4)=-2\cdot(-1,-2)$, así que son paralelos y solo generan una dirección.

d. Las coordenadas de $\vec{w}$ en la base $\{\vec{a},\vec{b}\}$ son los coeficientes de la combinación:

$(1, 2)$, aunque en la base canónica sean $(7, 0)$.

Solución del ejercicio 4

a. Las coordenadas deben ser proporcionales: $\frac{k}{2} = \frac{6}{3} = 2$, luego $k = 4$. Comprobación: $(4, 6) = 2(2, 3)$.

b. Tres puntos están alineados si [illegible] y [illegible] son paralelos. [illegible] y [illegible]: sí están alineados.

c. [illegible] debe ser paralelo a [illegible]: $\frac{1}{2} = \frac{1-m}{3}$, luego $1 - m = \frac{3}{2}$ y $m = -\frac{1}{2}$.

d. Comparamos los cocientes: $\frac{4}{-6} = -\frac{2}{3}$ y $\frac{-6}{9} = -\frac{2}{3}$. Son iguales, así que sí son paralelos: $(4, -6) = -\frac{2}{3}(-6, 9)$, con sentidos opuestos.

Solución del ejercicio 5

a. Multiplicamos coordenada a coordenada y sumamos: $\vec{u} \cdot \vec{v} = 3 \cdot 5 + 4 \cdot (-2) = 15 - 8 = 7$.

b. Despejamos el coseno: $|\vec{u}| = 5$ y $|\vec{v}| = \sqrt{25 + 4} = \sqrt{29}$. $\cos\alpha = \frac{7}{5\sqrt{29}} \approx 0{,}2600$, luego $\alpha \approx 74{,}93^\circ$. Es agudo porque el producto escalar es positivo.

c. Intercambiando las coordenadas y cambiando un signo se obtiene un perpendicular del mismo módulo: $(-4, 3)$. Comprobación: $3 \cdot (-4) + 4 \cdot 3 = 0$ y $\sqrt{16 + 9} = 5$.

d. Dos vectores son perpendiculares si su producto escalar es 0: $3k + 2 \cdot (-6) = 0$, es decir, $3k - 12 = 0$, luego $k = 4$.

Solución del ejercicio 6

a. $\vec{u} \cdot \vec{v} = 4 \cdot 3 + 3 \cdot 4 = 24$ y $|\vec{v}| = 5$. La proyección escalar es $\frac{24}{5} = 4{,}8$.

b. El vector proyección tiene esa longitud y la dirección de $\vec{v}$: $4{,}8 \cdot \frac{(3,4)}{5} = (2{,}88;\ 3{,}84)$.

c. La componente perpendicular es lo que queda al restar la proyección: $(4, 3) - (2{,}88;\ 3{,}84) = (1{,}12;\ -0{,}84)$. Comprobación: $1{,}12 \cdot 3 + (-0{,}84) \cdot 4 = 3{,}36 - 3{,}36 = 0$, así que es perpendicular a $\vec{v}$.

d. Como $\vec{u} \cdot \vec{v} = |\vec{u}||\vec{v}|\cos\alpha$, si el ángulo es obtuso el coseno es negativo y la proyección también: la «sombra» cae en sentido contrario a $\vec{v}$.

Solución del ejercicio 7

a. La fuente está en el punto medio, media de las coordenadas: $M = \left(\frac{2+8}{2}, \frac{3+7}{2}\right) = (5, 5)$.

b. . Los bancos están a un tercio y a dos tercios del camino:

y .

c. Si A' es el simétrico de A respecto de B, entonces B es el punto medio de AA': $A' = 2B - A = (16 - 2,\ 14 - 3) = (14, 11)$.

d. unidades; como cada unidad son 100 m, el paseo mide unos 721 m.

Solución del ejercicio 8

a. $\vec{v}_p = (0, 4)$ y $\vec{v}_c = (1{,}5;\ 0)$. Resultante $(1{,}5;\ 4)$.

b. $\sqrt{2{,}25 + 16} \approx 4{,}27$ m/s. Ángulo: $\arctan \frac{1{,}5}{4} \approx 20{,}56^\circ$.

c. Avanza 4 m/s hacia la otra orilla: $\frac{80}{4} = 20$ s. Desplazamiento: $1{,}5 \cdot 20 = 30$ m.

d. La componente en X debe compensar la corriente: $(-1{,}5;\ y)$ con $1{,}5^2 + y^2 = 16$, $y = \sqrt{13{,}75} \approx 3{,}71$ m/s. Tardaría $\frac{80}{3{,}71} \approx 21{,}57$ s.

Solución del ejercicio 9

a. $\vec{F} = (50\cos 30^\circ,\ -50\,\text{sen}\, 30^\circ) \approx (43{,}30;\ -25)$, porque empuja hacia abajo, y $\vec{d} = (20, 0)$.

b. $W = 43{,}30 \cdot 20 + (-25) \cdot 0 \approx 866{,}03$ J.

c. $50 \cdot 20 \cdot \cos 30^\circ = 1\,000 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} \approx 866{,}03$ J. Coincide.

d. $W = 0$: la componente vertical de la fuerza no ayuda a mover el carro en horizontal; solo lo aprieta contra el suelo.

Solución del ejercicio 10

a. Los desplazamientos sucesivos se suman: $\vec{a} + \vec{b} = (300 - 100,\ 400 + 200) = (200, 600)$. El dron termina en el punto $(200, 600)$.

b. La distancia en línea recta es el módulo del desplazamiento total: $\sqrt{200^2 + 600^2} = \sqrt{400\,000} \approx 632{,}46$ m.

c. El recorrido real es la suma de los módulos: $|\vec{a}| = \sqrt{90\,000 + 160\,000} = 500$ m y $|\vec{b}| = \sqrt{50\,000} \approx 223{,}61$ m, en total $723{,}61$ m. Es mayor que 632,46 m, como exige la desigualdad triangular.
d. Para volver debe seguir el vector opuesto al desplazamiento total: $(-200, -600)$.

Solución del ejercicio 11

a. , así que $D = A + (1, 3) = (2, 4)$.

b. Punto medio de AC: $\left(\frac{7}{2}, 3\right)$. Punto medio de BD: $\left(\frac{7}{2}, 3\right)$. Coinciden.
c. $\vec{u} = (4, 1)$ y $\vec{v} = (1, 3)$: $S = |4 \cdot 3 - 1 \cdot 1| = 11$ m².
d. $\vec{u} \cdot \vec{v} = 4 + 3 = 7 \neq 0$: los lados no son perpendiculares, no es un rectángulo.

Solución del ejercicio 12

a. Extremo menos origen: , , y

.

b. El ángulo en un vértice es el que forman los vectores que salen de él. En A: , luego $A \approx 71{,}57°$. En B: $\cos B = \frac{12}{4\sqrt{18}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$, luego $B = 45°$.
c. Los ángulos suman $180°$: $C = 180° - 71{,}57° - 45° = 63{,}43°$.
d. Lados: $|AB| = 4$, $|AC| = \sqrt{10} \approx 3{,}16$ y $|BC| = \sqrt{18} \approx 4{,}24$ dam. Perímetro $\approx 11{,}40$ dam, es decir, unos 114 m.

Solución del ejercicio 13

a. El peso actúa hacia abajo: $\vec{P} = (0, -80)$. Sumamos las tres fuerzas: $\vec{T_1} + \vec{T_2} + \vec{P} = (-30 + 30 + 0,\ 40 + 40 - 80) = (0, 0)$. La resultante es nula, así que la lámpara está en equilibrio.
b. $|\vec{T_1}| = |\vec{T_2}| = \sqrt{30^2 + 40^2} = \sqrt{2\,500} = 50$ N. Cada cable soporta 50 N, aunque entre los dos solo sostienen 80 N de peso, porque parte de la tensión es horizontal y se compensa.
c. Con la vertical, el cateto opuesto es 30 y el contiguo 40: $\tan\theta = \frac{30}{40}$, luego $\theta \approx 36{,}87°$.
d. $\cos\alpha = \frac{\vec{T_1} \cdot \vec{T_2}}{|\vec{T_1}||\vec{T_2}|} = \frac{-900 + 1\,600}{50 \cdot 50} = 0{,}28$, luego $\alpha \approx 73{,}74°$, el doble de $36{,}87°$, como se

espera por simetría.

Solución del ejercicio 14

a. Restamos P a cada poste: $(0,-3{,}66)-(16,0)=(-16,-3{,}66)$ y $(0,3{,}66)-(16,0)=(-16,3{,}66)$.
b. El producto escalar es $256-13{,}40=242{,}60$ y cada vector mide $\sqrt{256+13{,}40}\approx 16{,}41$. Entonces $\cos\alpha\approx\frac{242{,}60}{269{,}40}\approx 0{,}9005$, luego $\alpha\approx 25{,}77^\circ$.
c. Desde Q los vectores son $(-16,-11{,}66)$ y $(-16,-4{,}34)$, de módulos $\approx 19{,}80$ y $\approx 16{,}58$. $\cos\beta=\frac{256+50{,}60}{19{,}80\cdot 16{,}58}\approx 0{,}9341$, luego $\beta\approx 20{,}91^\circ$.
d. El jugador en P ve la portería con un ángulo mayor ($25{,}77^\circ$ frente a $20{,}91^\circ$), así que geométricamente tiene más opciones: estar centrado amplía el ángulo de tiro.

Solución del ejercicio 15

a. , , y .
b. y : los lados opuestos son iguales y paralelos.
c. : el ángulo en B es recto. Un paralelogramo con un ángulo recto es un rectángulo.
d. y .
e. Lados $\sqrt{20}$ y $\sqrt{5}$ unidades: área $\sqrt{100}=10$ unidades², es decir, $10\cdot 100=1\,000$ m². El anuncio es correcto. No es un cuadrado, porque los lados miden $\sqrt{20}\neq\sqrt{5}$.

Solución del ejercicio 16

a. $(0,250)+(50,0)=(50,250)$, con módulo $\sqrt{2\,500+62\,500}\approx 254{,}95$ km/h.
b. $\arctan\frac{50}{250}\approx 11{,}31^\circ$ hacia el este.
c. La velocidad respecto del aire debe ser $(-50,y)$ con $50^2+y^2=250^2$: $y\approx 244{,}95$. Ángulo con el norte: $\operatorname{arcsen}\frac{50}{250}\approx 11{,}54^\circ$ hacia el oeste.
d. Velocidad respecto del suelo $(0;\,244{,}95)$, unos 244,95 km/h. Duración: $\frac{600}{244{,}95}\approx 2{,}45$ h, unas 2 h 27 min.
e. Parte de la velocidad de la avioneta se gasta en compensar el viento, y solo la componente norte, menor que 250 km/h, la hace avanzar.

Solución del ejercicio 17

a. No son paralelos, porque $3 \cdot 2 - 1 \cdot 1 = 5 \neq 0$; por tanto, forman una base y cualquier punto se alcanza combinándolos.
b. Planteamos $a(3,1) + b(1,2) = (10,5)$: $3a + b = 10$ y $a + 2b = 5$. De la primera, $b = 10 - 3a$; sustituyendo, $a + 20 - 6a = 5$, luego $a = 3$ y $b = 1$.
c. Coste: $3 \cdot 2 + 1 \cdot 3 = 9$ céntimos.
d. En línea recta, $\sqrt{10^2 + 5^2} = \sqrt{125} \approx 11{,}18$. El robot recorre $3|\vec{u}| + |\vec{v}| = 3\sqrt{10} + \sqrt{5} \approx 9{,}49 + 2{,}24 = 11{,}72$, algo más.
e. $3a + b = 4$ y $a + 2b = 8$ dan $a = 0$ y $b = 4$: sí, son números enteros, así que basta con hacer 4 veces el movimiento $\vec{v}$.

Solución del ejercicio 18

a. $G = \left(\frac{2+8+5}{3}, \frac{1+3+8}{3}\right) = (5,4)$.
b. $M = \left(\frac{13}{2}, \frac{11}{2}\right)$. , con longitud $\approx 6{,}36$ unidades (636 m).
c. .
d. $|AG| = \sqrt{18} \approx 4{,}24$; $|BG| = |(-3,1)| = \sqrt{10} \approx 3{,}16$; $|CG| = |(0,-4)| = 4$. No están a la misma distancia: A camina más.
e. El circuncentro, que está a la misma distancia de los tres, o el punto que minimiza la suma de las distancias.

Solución del ejercicio 19

a. $3 \cdot 5 \cdot \cos 60^\circ = 7{,}5$.
b. $(\vec{u} + \vec{v}) \cdot (\vec{u} + \vec{v}) = \vec{u} \cdot \vec{u} + 2\,\vec{u} \cdot \vec{v} + \vec{v} \cdot \vec{v} = |\vec{u}|^2 + 2\,\vec{u} \cdot \vec{v} + |\vec{v}|^2$.
c. $|\vec{u} + \vec{v}|^2 = 9 + 25 + 15 = 49 \Rightarrow 7$. $|\vec{u} - \vec{v}|^2 = 9 + 25 - 15 = 19 \Rightarrow \sqrt{19} \approx 4{,}36$.
d. $\vec{u} - \vec{v}$ es el tercer lado del triángulo de lados 3 y 5 con ángulo 60°: $c^2 = 3^2 + 5^2 - 2 \cdot 3 \cdot 5 \cos 60^\circ$, que es justo el teorema del coseno.

Solución del ejercicio 20

a. Los perpendiculares a $(3,4)$ son $k(-4,3)$, de módulo $5|k|$. Con $k = \pm 2$: $(-8,6)$ y $(8,-6)$.
b. $P(x,0)$: o $x = 4$.

   Puntos $(2,0)$ y $(4,0)$.
c. Con $P(2,0)$: $|PA|^2 = 1 + 9 = 10$, $|PB|^2 = 9 + 1 = 10$ y

$|AB|^2 = 16 + 4 = 20 = 10 + 10$.

d. Sobre la circunferencia de diámetro AB (arco capaz de 90°), de centro $(3, 2)$ y radio $\sqrt{5}$, que corta al eje X en esos dos puntos.