Soluciones del examen - Trigonometría

Curso: 1 Bachillerato Ciencias · Duración: 55 minutos · /20

Solución del ejercicio 1 (4 puntos)

a. Por la relación fundamental: $\operatorname{sen}^2\alpha = 1 - \frac{25}{169} = \frac{144}{169}$, luego $\operatorname{sen}\alpha = \pm\frac{12}{13}$. En el tercer cuadrante el seno es negativo: $\operatorname{sen}\alpha = -\frac{12}{13}$. La tangente es $\tan\alpha = \frac{-12/13}{-5/13} = \frac{12}{5}$, positiva como corresponde al tercer cuadrante. Comprobación: $\left(\frac{12}{13}\right)^2 + \left(\frac{5}{13}\right)^2 = \frac{144+25}{169} = 1$. Un valor aproximado es $\alpha \approx 180^\circ + 67{,}38^\circ = 247{,}38^\circ$.

b. $240^\circ = 180^\circ + 60^\circ$, tercer cuadrante: $\operatorname{sen} 240^\circ = -\operatorname{sen} 60^\circ = -\frac{\sqrt{3}}{2}$. El coseno es par: $\cos(-45^\circ) = \cos 45^\circ = \frac{\sqrt{2}}{2}$. $\frac{5\pi}{6} = \pi - \frac{\pi}{6}$, segundo cuadrante: $\tan\frac{5\pi}{6} = -\tan\frac{\pi}{6} = -\frac{\sqrt{3}}{3}$. Cada ángulo se reduce al primer cuadrante y se asigna el signo según su cuadrante. El seno de 240° es negativo por estar en el tercer cuadrante.

Solución del ejercicio 2 (4 puntos)

a. Aplicamos el coseno de la diferencia, $\cos(a-b) = \cos a\cos b + \operatorname{sen} a\operatorname{sen} b$, con ángulos de razones conocidas: $\cos 15^\circ = \cos 45^\circ\cos 30^\circ + \operatorname{sen} 45^\circ\operatorname{sen} 30^\circ = \frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{1}{2} = \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4} \approx 0{,}966$. Con calculadora, $\cos 15^\circ \approx 0{,}9659$. El valor obtenido es exacto, como pide el enunciado.

b. De las expresiones de $\cos 2\alpha$, la más cómoda cuando se conoce el seno es $\cos 2\alpha = 1 - 2\operatorname{sen}^2\alpha$. Así $\cos 2\alpha = 1 - 2\cdot\frac{1}{9} = 1 - \frac{2}{9} = \frac{7}{9}$. No hace falta saber el cuadrante de α, porque el seno aparece al cuadrado. Comprobación: $\cos^2\alpha = \frac{8}{9}$ y $\cos^2\alpha - \operatorname{sen}^2\alpha = \frac{8}{9} - \frac{1}{9} = \frac{7}{9}$. Si se usara $2\cos^2\alpha - 1$, habría que calcular antes $\cos^2\alpha$.

Solución del ejercicio 3 (3 puntos)

a. Usamos las fórmulas del ángulo doble: $\operatorname{sen} 2\alpha = 2\operatorname{sen}\alpha\cos\alpha$ y, para el denominador, la expresión $\cos 2\alpha = 2\cos^2\alpha - 1$, que elimina el 1: $1 + \cos 2\alpha = 1 + 2\cos^2\alpha - 1 = 2\cos^2\alpha$. Elegimos esta versión porque deja el denominador como un único término. Así el 1 del denominador se cancela.

b. Sustituimos en el primer miembro: $\dfrac{2\operatorname{sen}\alpha\cos\alpha}{2\cos^2\alpha}$. Simplificamos el 2 y un factor $\cos\alpha$ (suponiendo $\cos\alpha \neq 0$): $\dfrac{\operatorname{sen}\alpha}{\cos\alpha} = \tan\alpha$, que es el segundo miembro. La

identidad queda demostrada. Comprobación con $\alpha = 45^\circ$: $\frac{\operatorname{sen} 90^\circ}{1+\cos 90^\circ} = \frac{1}{1} = 1 = \tan 45^\circ$.

Solución del ejercicio 4 (4 puntos)

a. Conocemos dos lados y el ángulo comprendido, así que aplicamos el teorema del coseno: $c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos C = 49 + 81 - 126\cos 50^\circ \approx 130 - 80{,}99 = 49{,}01$. Por tanto, $c \approx 7{,}00$ cm.

b. Despejamos el coseno de A: $\cos A = \frac{b^2+c^2-a^2}{2bc} = \frac{81+49{,}01-49}{2\cdot 9\cdot 7{,}00} \approx 0{,}643$, luego $A \approx 49{,}99^\circ$. Por la suma de ángulos, $B \approx 180^\circ - 50^\circ - 49{,}99^\circ = 80{,}01^\circ$. Como $c \approx a$, el triángulo es casi isósceles y $A \approx C$.

c. Con dos lados y el ángulo comprendido: $S = \frac{1}{2}ab\operatorname{sen} C = \frac{1}{2}\cdot 7 \cdot 9 \cdot \operatorname{sen} 50^\circ \approx 24{,}13$ cm². Comprobación con otros dos lados: $\frac{1}{2}bc\operatorname{sen} A \approx \frac{1}{2}\cdot 9 \cdot 7 \cdot 0{,}766 \approx 24{,}13$ cm².

Solución del ejercicio 5 (5 puntos)

a. Llamamos h a la altura del campanario sobre los ojos y x a la distancia final a la base. En los dos triángulos rectángulos: $\tan 50^\circ = \frac{h}{x}$ y $\tan 35^\circ = \frac{h}{x+60}$, es decir, $h = x\tan 50^\circ$ y $h = (x+60)\tan 35^\circ$. Ambos triángulos comparten el cateto vertical h.

b. Igualamos: $x\tan 50^\circ = (x+60)\tan 35^\circ$, luego $x = \frac{60\tan 35^\circ}{\tan 50^\circ - \tan 35^\circ} = \frac{42{,}01}{0{,}4916} \approx 85{,}47$ m. Entonces $h = x\tan 50^\circ \approx 101{,}86$ m. Comprobación: $(85{,}47+60)\tan 35^\circ \approx 145{,}47 \cdot 0{,}7002 \approx 101{,}86$ m.

c. Sumamos la altura de los ojos del alumno: $101{,}86 + 1{,}60 \approx 103{,}46$ m de altura total. Respuesta: el campanario mide unos 103,5 m.