Apuntes - Trigonometría

Curso: 1 Bachillerato Ciencias

En este tema aprenderás: medida de ángulos y razones trigonométricas, suma, diferencia y ángulo doble y resolución de triángulos. Cada idea va en un cuadro de color, con ejemplos resueltos paso a paso.

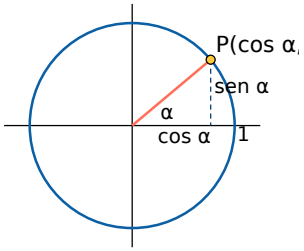
Actividad de introducción: medir lo que no se puede tocar

Hacia el año 240 a. C., Eratóstenes midió el tamaño de la Tierra sin salir de Egipto. Sabía que en Siena, el día del solsticio, el Sol caía vertical, mientras que en Alejandría, a unos 800 km al norte, un palo proyectaba una sombra que indicaba un ángulo de $7{,}2^\circ$. Como $7{,}2^\circ$ es la cincuentava parte de la circunferencia, dedujo que la vuelta a la Tierra medía unos $50 \cdot 800 = 40\,000$ km. ¡Muy cerca del valor real! La **trigonometría** nació así, para medir distancias inaccesibles: la altura de una torre, la anchura de un río, la distancia a un barco o a una estrella. En este tema ampliarás lo que sabes de 4.º de ESO: trabajarás con ángulos de cualquier tamaño y en radianes, aprenderás las fórmulas de suma, diferencia, ángulo doble y ángulo mitad, y resolverás triángulos cualesquiera con los teoremas del seno y del coseno.

Medida de ángulos y razones trigonométricas

Definición: radianes

Un ángulo se mide en grados o en **radianes**. Un radián es el ángulo cuyo arco mide igual que el radio; $180^\circ = \pi$ rad. Para convertir: $150^\circ = 150 \cdot \frac{\pi}{180} = \frac{5\pi}{6}$ rad. En la **circunferencia goniométrica** (radio 1) el punto asociado al ángulo α tiene coordenadas $(\cos\alpha,\ \operatorname{sen}\alpha)$, y $\tan\alpha = \frac{\operatorname{sen}\alpha}{\cos\alpha}$.



Observación

Valores notables: $\operatorname{sen}30^\circ = \frac{1}{2}$, $\operatorname{sen}45^\circ = \frac{\sqrt{2}}{2}$, $\operatorname{sen}60^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}$; $\cos30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}$, $\cos45^\circ = \frac{\sqrt{2}}{2}$, $\cos60^\circ = \frac{1}{2}$; $\tan30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{3}$, $\tan45^\circ = 1$, $\tan60^\circ = \sqrt{3}$.

Fórmula fundamental y reducción al primer cuadrante

Propiedad

Siempre se cumple $\operatorname{sen}^2\alpha+\cos^2\alpha=1$ y $1+\tan^2\alpha=\frac{1}{\cos^2\alpha}$. Con ella, conociendo una razón y el cuadrante, se obtienen las demás. **Ejemplo 1.** Si $\cos\alpha=-\frac{5}{13}$ y α está en el 2.º cuadrante: $\operatorname{sen}\alpha=\sqrt{1-\frac{25}{169}}=\frac{12}{13}$ (positivo en el 2.º cuadrante) y $\tan\alpha=-\frac{12}{5}$.

Regla

Para ángulos de otros cuadrantes: $\operatorname{sen}(180^\circ-\alpha)=\operatorname{sen}\alpha$, $\cos(180^\circ-\alpha)=-\cos\alpha$, $\operatorname{sen}(180^\circ+\alpha)=-\operatorname{sen}\alpha$, $\cos(-\alpha)=\cos\alpha$, $\operatorname{sen}(-\alpha)=-\operatorname{sen}\alpha$. Así, $\operatorname{sen}150^\circ=\frac{1}{2}$ y $\cos210^\circ=-\frac{\sqrt{3}}{2}$.

Suma, diferencia y ángulo doble

Observación

$\operatorname{sen}(a\pm b)=\operatorname{sen}a\cos b\pm\cos a\operatorname{sen}b$; $\cos(a\pm b)=\cos a\cos b\mp\operatorname{sen}a\operatorname{sen}b$; $\tan(a+b)=\frac{\tan a+\tan b}{1-\tan a\tan b}$. Para el ángulo doble: $\operatorname{sen}2a=2\operatorname{sen}a\cos a$, $\cos2a=\cos^2a-\operatorname{sen}^2a$.

Ejemplo 1

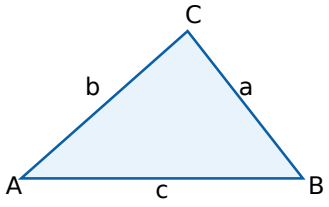
$\operatorname{sen}75^\circ=\operatorname{sen}(45^\circ+30^\circ)=\frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{1}{2}=\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}\approx0{,}966$.

Resolución de triángulos

Propiedad: resolución de triángulos

En un triángulo cualquiera con lados a,b,c opuestos a los ángulos A,B,C:

- **Teorema del seno:** $\frac{a}{\operatorname{sen}A}=\frac{b}{\operatorname{sen}B}=\frac{c}{\operatorname{sen}C}$.
- **Teorema del coseno:** $c^2=a^2+b^2-2ab\cos C$.
- **Área:** $S=\frac{1}{2}ab\operatorname{sen}C$.



Ejemplo 2

Con $A = 40^\circ$, $B = 60^\circ$ y $a = 8$: $C = 80^\circ$; $b = \frac{8 \operatorname{sen} 60^\circ}{\operatorname{sen} 40^\circ} \approx 10{,}78$ y $c = \frac{8 \operatorname{sen} 80^\circ}{\operatorname{sen} 40^\circ} \approx 12{,}26$.

Si se conocen los tres lados $5, 7, 8$, el mayor ángulo (opuesto al 8) cumple $\cos\gamma = \frac{25+49-64}{2\cdot 5\cdot 7} = \frac{1}{7} \Rightarrow \gamma \approx 81{,}79^\circ$.

Regla

Los problemas de altura y distancia se resuelven dibujando el triángulo: una torre vista desde 40 m con elevación de 52° mide $40\tan 52^\circ \approx 51{,}2$ m.

Ejemplo 3

En un triángulo rectángulo, $\operatorname{sen}\alpha = \frac{\text{cateto opuesto}}{\text{hipotenusa}}$, $\cos\alpha = \frac{\text{cateto contiguo}}{\text{hipotenusa}}$ y $\tan\alpha = \frac{\text{opuesto}}{\text{contiguo}}$.

Si la hipotenusa mide 10 cm y un ángulo agudo es de 35°, el cateto opuesto mide $10\operatorname{sen} 35^\circ \approx 5{,}74$ cm y el contiguo $10\cos 35^\circ \approx 8{,}19$ cm.

Ejemplo 4

Con $a = 7$, $b = 9$ y $C = 60^\circ$, el teorema del coseno da $c^2 = 49 + 81 - 2\cdot 7\cdot 9\cdot \frac{1}{2} = 67$, luego $c \approx 8{,}19$.

El área es $\frac{1}{2}\cdot 7\cdot 9\cdot \operatorname{sen} 60^\circ \approx 27{,}28$.

Cómo se hace: resolver un triángulo cualquiera

1. Con dos ángulos y un lado, halla el tercer ángulo (suman 180°) y usa el teorema del seno.
2. Con dos lados y el ángulo comprendido, usa el teorema del coseno para el tercer lado.
3. Con los tres lados, usa el teorema del coseno para hallar los ángulos.
4. Comprueba que los ángulos suman 180° y que el lado mayor se opone al ángulo mayor.

¡Atención! Errores frecuentes

- Dejar la calculadora en radianes cuando el ángulo está en grados (o al revés).
- Escribir $\operatorname{sen}(a+b) = \operatorname{sen} a + \operatorname{sen} b$: es falso.
- Olvidar el signo según el cuadrante.
- Usar el teorema del seno con un ángulo obtuso sin pensar que $\operatorname{sen}\alpha = \operatorname{sen}(180^\circ - \alpha)$ admite dos triángulos.

La circunferencia goniométrica

Definición: razones de un ángulo cualquiera

En la **circunferencia goniométrica**, de radio 1 y centro en el origen, un ángulo α se mide desde el semieje positivo de abscisas en sentido antihorario. Si $P = (x, y)$ es el punto de la circunferencia correspondiente, se define $\cos\alpha = x$, $\operatorname{sen}\alpha = y$ y $\tan\alpha = \frac{y}{x}$. Así, las razones tienen sentido para cualquier ángulo, incluso mayor que 360° o negativo. El seno es positivo en los cuadrantes primero y segundo; el coseno, en el primero y el cuarto; y la tangente, en el primero y el tercero.

Cómo se hace: reducir un ángulo al primer cuadrante

1. Si el ángulo es mayor que 360°, resta vueltas completas: $\alpha = 360^\circ k + \beta$, con $0^\circ \leq \beta$.
2. Segundo cuadrante: $\beta = 180^\circ - \gamma$; el seno se conserva y el coseno y la tangente cambian de signo.
3. Tercer cuadrante: $\beta = 180^\circ + \gamma$; la tangente se conserva y el seno y el coseno cambian de signo.
4. Cuarto cuadrante: $\beta = 360^\circ - \gamma$; el coseno se conserva y el seno y la tangente cambian de signo.

Ejemplo 5

Calcula $\cos\left(-\frac{7\pi}{6}\right)$ sin calculadora.

El coseno es par: $\cos\left(-\frac{7\pi}{6}\right) = \cos\frac{7\pi}{6}$. Como $\frac{7\pi}{6} = \pi + \frac{\pi}{6}$, el ángulo está en el tercer cuadrante, donde el coseno es negativo: $\cos\frac{7\pi}{6} = -\cos\frac{\pi}{6} = -\frac{\sqrt{3}}{2}$.

Fórmulas del ángulo mitad y transformaciones

Regla: ángulo mitad

De $\cos 2\beta = 1 - 2\operatorname{sen}^2\beta = 2\cos^2\beta - 1$, tomando $\beta = \frac{\alpha}{2}$, se obtiene $\operatorname{sen}\frac{\alpha}{2} = \pm\sqrt{\frac{1-\cos\alpha}{2}}$, $\cos\frac{\alpha}{2} = \pm\sqrt{\frac{1+\cos\alpha}{2}}$ y $\tan\frac{\alpha}{2} = \pm\sqrt{\frac{1-\cos\alpha}{1+\cos\alpha}}$. El signo se elige según el cuadrante de $\frac{\alpha}{2}$, no el de α. Estas fórmulas permiten, por ejemplo, calcular razones exactas de 15° o de $22{,}5^\circ$ a partir de las de 30° y 45°.

Ejemplo 6

Calcula $\cos 22{,}5^\circ$ de forma exacta.

$22{,}5^\circ = \frac{45^\circ}{2}$ está en el primer cuadrante, así que el signo es positivo:

$\cos 22{,}5^\circ = \sqrt{\frac{1+\frac{\sqrt{2}}{2}}{2}} = \sqrt{\frac{2+\sqrt{2}}{4}} = \frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2} \approx 0{,}9239.$

Área de un triángulo

Propiedad: fórmulas del área

Si se conocen dos lados y el ángulo que forman, $S = \frac{1}{2}ab\,\operatorname{sen} C$, porque la altura sobre el lado a es $b\,\operatorname{sen} C$. Si se conocen los tres lados, se usa la **fórmula de Herón**: $S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$, con $p = \frac{a+b+c}{2}$ el semiperímetro. Además, en todo triángulo se cumple $\frac{a}{\operatorname{sen} A} = 2R$, donde R es el radio de la circunferencia circunscrita.

Ejemplo 7

Una parcela triangular tiene lados de 13, 14 y 15 m. Calcula su área y el radio de la circunferencia que pasa por sus tres vértices.

Semiperímetro: $p = \frac{13+14+15}{2} = 21$. Por Herón, $S = \sqrt{21 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6} = \sqrt{7\,056} = 84$ m². Para el radio, calculamos un ángulo con el teorema del coseno: $\cos C = \frac{13^2+14^2-15^2}{2 \cdot 13 \cdot 14} = \frac{140}{364} = \frac{5}{13}$, así que $\operatorname{sen} C = \frac{12}{13}$. Entonces $2R = \frac{c}{\operatorname{sen} C} = \frac{15}{12/13} = 16{,}25$ y $R = 8{,}125$ m. Comprobación del área: $\frac{1}{2} \cdot 13 \cdot 14 \cdot \frac{12}{13} = 84$ m².

Resolución de triángulos: los cuatro casos

Observación: qué teorema usar en cada caso

Resolver un triángulo es calcular sus tres lados y sus tres ángulos a partir de tres datos, de los que al menos uno debe ser un lado. Hay cuatro casos. Si se conocen **un lado y dos ángulos**, se calcula el tercer ángulo restando de 180° y los lados con el teorema del seno. Si se conocen **dos lados y el ángulo que forman**, se calcula el tercer lado con el teorema del coseno. Si se conocen **los tres lados**, se calculan los ángulos con el teorema del coseno. Y si se conocen **dos lados y un ángulo opuesto a uno de ellos**, se usa el teorema del seno, y puede haber dos triángulos, uno o ninguno: es el caso ambiguo.

Ejemplo 8

Resuelve el triángulo con $a = 12$ cm, $B = 35^\circ$ y $C = 80^\circ$.

Primero, $A = 180^\circ - 35^\circ - 80^\circ = 65^\circ$. Por el teorema del seno, $\frac{12}{\operatorname{sen} 65^\circ} \approx 13{,}24$, así que $b \approx 13{,}24 \cdot \operatorname{sen} 35^\circ \approx 7{,}59$ cm y $c \approx 13{,}24 \cdot \operatorname{sen} 80^\circ \approx 13{,}04$ cm. Comprobamos que el lado mayor, c, está opuesto al ángulo mayor, $C = 80^\circ$.

El método de la doble observación

Cómo se hace: calcular una altura con pie inaccesible

1. Mide el ángulo de elevación α desde un primer punto.
2. Acércate una distancia d en línea recta y mide el nuevo ángulo β.
3. Plantea $h = x\tan\beta$ y $h = (x+d)\tan\alpha$, donde x es la distancia final al pie.
4. Resuelve el sistema: $x = \frac{d\tan\alpha}{\tan\beta - \tan\alpha}$ y $h = x\tan\beta$.
5. Si las medidas se toman a la altura de los ojos, suma esa altura al resultado.
6. Comprueba el resultado con otro método, por ejemplo con el teorema del seno en el triángulo formado por los dos puntos de observación y la cima: el ángulo en la cima es la diferencia entre los dos ángulos de elevación.

¡Atención! el modo de la calculadora y el caso ambiguo

Antes de calcular, comprueba si la calculadora está en grados (DEG) o en radianes (RAD): $\operatorname{sen} 30$ da $0{,}5$ en grados, pero $-0{,}988$ en radianes. Al usar el teorema del seno para hallar un ángulo, recuerda que $\operatorname{sen}\theta = \operatorname{sen}(180^\circ - \theta)$: puede haber dos soluciones. El teorema del coseno no tiene esa ambigüedad, porque el coseno distingue los ángulos agudos de los obtusos.

¿Sabías que? Las tablas de cuerdas

El astrónomo griego Hiparco, en el siglo II a. C., construyó la primera tabla de «cuerdas», antecesora de las tablas de senos. Los matemáticos indios transformaron la cuerda en la media cuerda, que es nuestro seno, y los árabes la transmitieron a Europa. La palabra «seno» viene de una mala traducción al latín de un término árabe que significaba «bahía» o «pliegue». Siglos más tarde, en el XVIII, los geodestas que midieron el meridiano de París a Barcelona usaron cadenas de triángulos, la triangulación, y gracias a sus cálculos se definió el metro como la diezmillonésima parte de la distancia del polo norte al ecuador. Hoy los receptores GPS de los móviles siguen resolviendo, a gran velocidad, problemas de distancias y ángulos.

El consejo de Otto

Dibuja siempre el triángulo y marca lo que conoces: si tienes dos ángulos y un lado, seno; si tienes dos lados y el ángulo comprendido, o los tres lados, coseno.