Ejercicios - Trigonometría

Curso: 1 Bachillerato Ciencias · 20

Se debe mostrar el desarrollo de cada ejercicio.

Ejercicio 1

Ejercicio 1 – Grados y radianes

Un radián es el ángulo central que abarca un arco de longitud igual al radio. Como la circunferencia completa mide 2π radios, $360^\circ = 2\pi$ rad.

a. Expresa en radianes 150° y 225°.
b. Expresa en grados $\frac{3\pi}{5}$ rad y 2 rad.
c. Calcula la longitud del arco que abarca un ángulo de $\frac{2\pi}{3}$ rad en una circunferencia de 12 cm de radio.
d. ¿Qué ángulo, en radianes, recorre la aguja de los minutos en 20 minutos?

Ejercicio 2

Ejercicio 2 – Razones a partir de una de ellas

Sabiendo que $\operatorname{sen}\alpha = \frac{3}{5}$ y que α está en el segundo cuadrante:

a. Calcula $\cos\alpha$ con la relación fundamental.
b. Calcula $\tan\alpha$.
c. Calcula $\sec\alpha$, $\csc\alpha$ y $\cot\alpha$.
d. Explica qué cambiaría si α estuviera en el primer cuadrante.

Ejercicio 3

Ejercicio 3 – Reducción al primer cuadrante

Calcula sin calculadora, relacionando cada ángulo con uno del primer cuadrante.

a. $\operatorname{sen}150^\circ$ y $\cos 210^\circ$
b. $\tan 315^\circ$ y $\operatorname{sen}(-60^\circ)$
c. $\cos 1\,110^\circ$
d. $\operatorname{sen}\frac{5\pi}{4}$

Ejercicio 4

Ejercicio 4 – Identidades trigonométricas

Demuestra las identidades partiendo de un miembro y llegando al otro. Usa $\operatorname{sen}^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$.

a. $1+\tan^2\alpha=\dfrac{1}{\cos^2\alpha}$
b. $\operatorname{sen}^4\alpha-\cos^4\alpha=\operatorname{sen}^2\alpha-\cos^2\alpha$
c. $(\operatorname{sen}\alpha+\cos\alpha)^2=1+\operatorname{sen}2\alpha$
d. $\dfrac{\operatorname{sen}\alpha}{1-\cos\alpha}=\dfrac{1+\cos\alpha}{\operatorname{sen}\alpha}$

Ejercicio 5

Ejercicio 5 – Fórmulas de suma y diferencia

Usa $\operatorname{sen}(a\pm b)=\operatorname{sen}a\cos b\pm\cos a\operatorname{sen}b$, $\cos(a\pm b)=\cos a\cos b\mp\operatorname{sen}a\operatorname{sen}b$ y $\tan(a\pm b)=\dfrac{\tan a\pm\tan b}{1\mp\tan a\tan b}$.

a. Calcula $\operatorname{sen}75^\circ$ de forma exacta como $\operatorname{sen}(45^\circ+30^\circ)$.
b. Calcula $\tan 105^\circ$ de forma exacta.
c. Si $\operatorname{sen}a=\frac{3}{5}$ y $\cos b=\frac{5}{13}$, con a y b agudos, calcula $\cos(a+b)$ y $\operatorname{sen}(a+b)$.
d. ¿En qué cuadrante está $a+b$?

Ejercicio 6

Ejercicio 6 – Ángulo doble y ángulo mitad

Sea α un ángulo agudo con $\operatorname{sen}\alpha=\frac{4}{5}$.

a. Calcula $\cos\alpha$.
b. Calcula $\operatorname{sen}2\alpha$, $\cos2\alpha$ y $\tan2\alpha$.
c. Calcula $\cos\frac{\alpha}{2}$ y $\operatorname{sen}\frac{\alpha}{2}$ con las fórmulas del ángulo mitad.
d. ¿En qué cuadrante está 2α?

Ejercicio 7

Ejercicio 7 – La altura de la torre

Unos alumnos quieren medir la altura de la torre de la catedral de su ciudad. Desde un punto A ven la parte alta con un ángulo de elevación de 30°. Se acercan 20 m en línea recta hacia la torre, hasta un punto B, y la ven con un ángulo de 45°.

a. Llama h a la altura y x a la distancia de B al pie de la torre. Escribe dos ecuaciones con las tangentes.
b. Resuelve el sistema y calcula h de forma exacta.
c. Da la altura con dos decimales y la distancia de A a la torre.
d. ¿Por qué no basta con medir un solo ángulo?

Ejercicio 8

Ejercicio 8 – El velero y los dos faros

Dos faros de la costa de Cádiz, A y B, están a 10 km de distancia. Desde A se ve un velero C con un ángulo de 70° respecto de la línea AB, y desde B con un ángulo de 60°.

a. Calcula el ángulo en C.
b. Aplica el teorema del seno para calcular la distancia del velero a cada faro.
c. Calcula la distancia del velero a la costa (recta AB).
d. Comprueba que el lado mayor está opuesto al ángulo mayor.

Ejercicio 9

Ejercicio 9 – El túnel bajo la montaña

Para construir un túnel recto entre dos puntos A y B situados a ambos lados de una montaña del Pirineo, un topógrafo se coloca en un punto C desde el que ve los dos. Mide $CA = 450$ m, $CB = 600$ m y el ángulo $\widehat{ACB} = 75^\circ$.

a. Calcula la longitud del túnel con el teorema del coseno.
b. Calcula el ángulo $\widehat{A}$ con el teorema del coseno.
c. Calcula el ángulo $\widehat{B}$.
d. Si se excava a 4,5 m por día, ¿cuántos días durará la obra?

Ejercicio 10

Ejercicio 10 – El área de una parcela

Una familia de La Rioja quiere vender dos parcelas triangulares de viñedo. De la primera conocen dos lados, 40 m y 55 m, y el ángulo que forman, 65°. De la segunda, los tres lados: 13, 14 y 15 dam.

a. Calcula el área de la primera con $S = \frac{1}{2}ab\,\operatorname{sen} C$.
b. Calcula el área de la segunda con la fórmula de Herón, $S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$, donde p es el semiperímetro.
c. Expresa las dos áreas en hectáreas (1 ha = 10 000 m²; 1 dam² = 100 m²).
d. Si la hectárea de viñedo se paga a 25 000 €, ¿cuánto valen las dos parcelas?

Ejercicio 11

Ejercicio 11 – El tirante de la antena

Un técnico debe sujetar una antena con un cable. Del triángulo que forman el suelo, la antena y el cable conoce: el cable mide $a = 8$ m, el lado $b = 10$ m y el ángulo $A = 40^\circ$, opuesto al cable.

a. Aplica el teorema del seno para calcular $\operatorname{sen} B$.

b. Explica por qué hay dos valores posibles de B y calcúlalos.
c. Calcula en cada caso el ángulo C y el lado c.
d. ¿Qué dato adicional permitiría al técnico saber cuál de los dos triángulos es el real?

Ejercicio 12

Ejercicio 12 – La anchura del río

Para medir la anchura del río Ebro sin cruzarlo, dos alumnos se colocan en la misma orilla, en los puntos A y B, separados 50 m. En la otra orilla hay un árbol T. Desde A, el ángulo entre AB y la visual al árbol es 62°; desde B, 48°.

a. Calcula el ángulo en T.
b. Calcula la distancia AT con el teorema del seno.
c. Calcula la anchura del río, que es la distancia de T a la recta AB.
d. Calcula también BT y comprueba que la altura sale igual con $BT \cdot \operatorname{sen} 48^\circ$.

Ejercicio 13

Ejercicio 13 – Remolcar una barca

En el embalse de Buendía, dos personas arrastran una barca hasta la orilla tirando de dos cuerdas. Una tira con una fuerza de 300 N y la otra con 400 N, y las cuerdas forman un ángulo de 60°. La fuerza resultante es la diagonal del paralelogramo que forman las dos fuerzas.

a. Dibuja el paralelogramo y explica por qué el ángulo del triángulo opuesto a la resultante mide 120°.
b. Calcula el módulo de la fuerza resultante.
c. Calcula el ángulo que forma la resultante con la cuerda de 300 N.
d. ¿Qué fuerza resultante se obtendría si las dos tirasen en la misma dirección? ¿Y en direcciones perpendiculares?

Ejercicio 14

Ejercicio 14 – La rampa accesible

La normativa de accesibilidad exige que las rampas largas tengan una pendiente máxima del 8 %, es decir, que suban 8 cm por cada metro horizontal. Un instituto debe salvar un desnivel de 60 cm en la entrada.

a. Calcula el ángulo de inclinación máximo de la rampa.
b. Calcula la longitud horizontal mínima que debe ocupar.
c. Calcula la longitud de la rampa (la que recorre la silla de ruedas).
d. Si la entrada solo deja 5 m horizontales, ¿qué pendiente tendría? ¿Cumpliría la norma?

Ejercicio 15

Ejercicio 15 – ¿A qué altura vuela el avión?

Dos estaciones meteorológicas de un aeropuerto, P y Q, están separadas 5 km en línea recta. En el mismo instante, un avión que se encuentra sobre la recta PQ, más allá de Q, se observa desde P con un ángulo de elevación de 40° y desde Q con uno de 55°. Los técnicos quieren conocer la altura del avión y su distancia horizontal a las estaciones.

a. Haz un dibujo con los datos y llama h a la altura y x a la distancia horizontal de Q al punto situado bajo el avión.
b. Escribe las dos ecuaciones con las tangentes.
c. Resuelve el sistema y calcula h con dos decimales.
d. Calcula la distancia en línea recta del avión a la estación Q.
e. Resuelve el problema de otro modo: calcula el ángulo en el avión y usa el teorema del seno en el triángulo PQA.

Ejercicio 16

Ejercicio 16 – Dos aerogeneradores

Desde la torre de control de un parque eólico de Navarra se ven dos aerogeneradores, A y B. El técnico mide con un telémetro láser que A está a 800 m y B a 1 200 m, y que el ángulo entre las dos visuales es de 35°. Quiere tender un cable entre los dos aerogeneradores y saber con qué ángulo debe salir el cable desde A.

a. Calcula la distancia entre los dos aerogeneradores.
b. Calcula el ángulo en A con el teorema del coseno.
c. Un compañero lo calcula con el teorema del seno y obtiene $75{,}11^\circ$. Explica su error.
d. Calcula el ángulo en B.
e. Si el cable cuesta 18 € el metro y hay que añadir un 10 % por las curvas del terreno, ¿cuánto costará?

Ejercicio 17

Ejercicio 17 – El quiosco pentagonal

El ayuntamiento de Ponferrada va a construir un quiosco de música con planta de pentágono regular inscrito en una circunferencia de 10 m de radio. El arquitecto necesita el lado, la apotema, el área de la planta y la longitud de la barandilla que rodeará el quiosco. Para ello divide el pentágono en cinco triángulos isósceles iguales con vértice en el centro.

a. Calcula el ángulo central de cada triángulo y la mitad de ese ángulo.
b. Calcula el lado del pentágono.
c. Calcula la apotema.
d. Calcula el área de la planta y la longitud de la barandilla.

e. Calcula el área con la fórmula $S = \frac{1}{2} r^2 \operatorname{sen} 72^\circ$ para cada triángulo y comprueba el resultado.

Ejercicio 18

Ejercicio 18 – El rumbo de un barco

Un pesquero sale del puerto de Vigo y navega 30 km con rumbo N 40° E (es decir, 40° al este del norte). Después cambia a rumbo S 70° E y navega 20 km más. El patrón quiere saber a qué distancia está del puerto y qué rumbo debe tomar para volver.

a. Haz un esquema y comprueba que el ángulo en el punto de giro mide 110°.
b. Calcula la distancia al puerto con el teorema del coseno.
c. Calcula el ángulo en el puerto entre el primer tramo y la línea que une el puerto con el barco.
d. Deduce el rumbo con el que se ve el barco desde el puerto.
e. Si el barco navega a 15 km/h, ¿cuánto tardará en volver?

Ejercicio 19

Ejercicio 19 – El cruce de dos calles

En el plano de una urbanización, dos calles rectas siguen las rectas $y = 2x$ e $y = \frac{1}{3}x + 4$. Su inclinación respecto del eje X viene dada por $\tan\alpha = 2$ y $\tan\beta = \frac{1}{3}$.

a. Calcula los ángulos α y β.
b. Usa la fórmula de $\tan(\alpha - \beta)$ para calcular el ángulo que forman las dos calles.
c. Comprueba el resultado restando los ángulos del apartado a).
d. ¿Qué ocurriría con la fórmula si las calles fueran perpendiculares?

Ejercicio 20

Ejercicio 20 – Desafío: el valor exacto de sen 18°

El ángulo de 18° aparece en el pentágono regular. Vamos a calcular su seno de forma exacta.

a. Demuestra que $\cos 3\alpha = 4\cos^3\alpha - 3\cos\alpha$ usando $\cos(2\alpha + \alpha)$.
b. Con $\alpha = 18^\circ$, justifica que $\operatorname{sen} 2\alpha = \cos 3\alpha$.
c. Deduce que $s = \operatorname{sen} 18^\circ$ cumple $4s^2 + 2s - 1 = 0$.
d. Resuelve la ecuación y obtén $\operatorname{sen} 18^\circ$ de forma exacta.