Soluciones - Trigonometría

Curso: 1 Bachillerato Ciencias

Solución del ejercicio 1

a. Para pasar de grados a radianes multiplicamos por $\frac{\pi}{180}$: $150 \cdot \frac{\pi}{180} = \frac{5\pi}{6}$ rad y $225 \cdot \frac{\pi}{180} = \frac{5\pi}{4}$ rad.
b. Para pasar de radianes a grados multiplicamos por $\frac{180}{\pi}$: $\frac{3\pi}{5} \cdot \frac{180}{\pi} = 108^\circ$ y $2 \cdot \frac{180}{\pi} \approx 114{,}59^\circ$. Un radián mide, por tanto, unos $57{,}3^\circ$.
c. Con el ángulo en radianes, la longitud del arco es el radio por el ángulo: $L = r \cdot \alpha = 12 \cdot \frac{2\pi}{3} = 8\pi \approx 25{,}13$ cm.
d. La aguja de los minutos da una vuelta, 2π rad, en 60 minutos. 20 minutos son la tercera parte: $\frac{2\pi}{3}$ rad, es decir, 120°.

Solución del ejercicio 2

a. De $\operatorname{sen}^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$: $\cos^2\alpha = 1 - \frac{9}{25} = \frac{16}{25}$, luego $\cos\alpha = \pm\frac{4}{5}$. En el segundo cuadrante el coseno es negativo: $\cos\alpha = -\frac{4}{5}$.
b. $\tan\alpha = \dfrac{\operatorname{sen}\alpha}{\cos\alpha} = \dfrac{3/5}{-4/5} = -\dfrac{3}{4}$, negativa, como corresponde al segundo cuadrante.
c. Son las inversas: $\sec\alpha = \frac{1}{\cos\alpha} = -\frac{5}{4}$, $\csc\alpha = \frac{1}{\operatorname{sen}\alpha} = \frac{5}{3}$ y $\cot\alpha = \frac{1}{\tan\alpha} = -\frac{4}{3}$.
d. En el primer cuadrante todas las razones son positivas: $\cos\alpha = \frac{4}{5}$, $\tan\alpha = \frac{3}{4}$, $\sec\alpha = \frac{5}{4}$ y $\cot\alpha = \frac{4}{3}$. El seno y la cosecante no cambian.

Solución del ejercicio 3

a. $150^\circ = 180^\circ - 30^\circ$: los ángulos suplementarios tienen el mismo seno, así que $\operatorname{sen}150^\circ = \operatorname{sen}30^\circ = \frac{1}{2}$. $210^\circ = 180^\circ + 30^\circ$ está en el tercer cuadrante, donde el coseno es negativo: $\cos 210^\circ = -\cos 30^\circ = -\frac{\sqrt{3}}{2}$.
b. $315^\circ = 360^\circ - 45^\circ$ está en el cuarto cuadrante, con tangente negativa: $\tan 315^\circ = -\tan 45^\circ = -1$. Los ángulos opuestos tienen senos opuestos: $\operatorname{sen}(-60^\circ) = -\frac{\sqrt{3}}{2}$.
c. Quitamos vueltas completas: $1\,110^\circ = 3 \cdot 360^\circ + 30^\circ$, luego $\cos 1\,110^\circ = \cos 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}$.
d. $\frac{5\pi}{4} = \pi + \frac{\pi}{4}$ está en el tercer cuadrante, con seno negativo: $\operatorname{sen}\frac{5\pi}{4} = -\operatorname{sen}\frac{\pi}{4} = -\frac{\sqrt{2}}{2}$.

Solución del ejercicio 4

a. Partimos del primer miembro y escribimos la tangente como cociente: $1+\frac{\operatorname{sen}^2\alpha}{\cos^2\alpha}=\frac{\cos^2\alpha+\operatorname{sen}^2\alpha}{\cos^2\alpha}$. Por la relación fundamental, el numerador vale 1: queda $\frac{1}{\cos^2\alpha}$.

b. El primer miembro es una diferencia de cuadrados: $(\operatorname{sen}^2\alpha-\cos^2\alpha)(\operatorname{sen}^2\alpha+\cos^2\alpha)$. El segundo factor vale 1, así que queda $\operatorname{sen}^2\alpha-\cos^2\alpha$.

c. Desarrollamos el cuadrado: $\operatorname{sen}^2\alpha+2\operatorname{sen}\alpha\cos\alpha+\cos^2\alpha=1+2\operatorname{sen}\alpha\cos\alpha$, y como $2\operatorname{sen}\alpha\cos\alpha=\operatorname{sen}2\alpha$, resulta $1+\operatorname{sen}2\alpha$.

d. Dos fracciones son iguales si sus productos cruzados lo son: $\operatorname{sen}^2\alpha=(1-\cos\alpha)(1+\cos\alpha)=1-\cos^2\alpha$, que es la relación fundamental. La identidad es cierta siempre que los denominadores no se anulen.

Solución del ejercicio 5

a. Aplicamos la fórmula del seno de la suma con valores conocidos: $\operatorname{sen}75^\circ=\operatorname{sen}45^\circ\cos30^\circ+\cos45^\circ\operatorname{sen}30^\circ=\frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{1}{2}=\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}\approx0{,}966$.

b. $\tan105^\circ=\tan(60^\circ+45^\circ)=\dfrac{\sqrt{3}+1}{1-\sqrt{3}\cdot1}$. Racionalizamos multiplicando por $1+\sqrt{3}$: $\dfrac{(\sqrt{3}+1)^2}{1-3}=\dfrac{4+2\sqrt{3}}{-2}=-(2+\sqrt{3})$. Es negativa porque 105° está en el segundo cuadrante.

c. Como son agudos, $\cos a=\sqrt{1-\frac{9}{25}}=\frac{4}{5}$ y $\operatorname{sen}b=\sqrt{1-\frac{25}{169}}=\frac{12}{13}$. Entonces $\cos(a+b)=\frac{4}{5}\cdot\frac{5}{13}-\frac{3}{5}\cdot\frac{12}{13}=\frac{20-36}{65}=-\frac{16}{65}$ y $\operatorname{sen}(a+b)=\frac{3}{5}\cdot\frac{5}{13}+\frac{4}{5}\cdot\frac{12}{13}=\frac{63}{65}$.

d. Seno positivo y coseno negativo: $a+b$ está en el segundo cuadrante.

Solución del ejercicio 6

a. Por la relación fundamental, y siendo α agudo (coseno positivo): $\cos\alpha=\sqrt{1-\frac{16}{25}}=\sqrt{\frac{9}{25}}=\frac{3}{5}$.

b. Fórmulas del ángulo doble: $\operatorname{sen}2\alpha=2\operatorname{sen}\alpha\cos\alpha=2\cdot\frac{4}{5}\cdot\frac{3}{5}=\frac{24}{25}$; $\cos2\alpha=\cos^2\alpha-\operatorname{sen}^2\alpha=\frac{9}{25}-\frac{16}{25}=-\frac{7}{25}$; $\tan2\alpha=\frac{24/25}{-7/25}=-\frac{24}{7}$.

c. Fórmulas del ángulo mitad: $\cos\frac{\alpha}{2}=\sqrt{\frac{1+\cos\alpha}{2}}=\sqrt{\frac{1+3/5}{2}}=\sqrt{\frac{4}{5}}=\frac{2\sqrt{5}}{5}$ y $\operatorname{sen}\frac{\alpha}{2}=\sqrt{\frac{1-3/5}{2}}=\sqrt{\frac{1}{5}}=\frac{\sqrt{5}}{5}$. Tomamos el signo positivo porque $\frac{\alpha}{2}$ es agudo.

d. $\operatorname{sen}2\alpha>0$ y $\cos2\alpha$: 2α está en el segundo cuadrante.

Solución del ejercicio 7

a. $\tan 45^\circ = \frac{h}{x} \Rightarrow h = x$; $\tan 30^\circ = \frac{h}{x+20} \Rightarrow h = \frac{x+20}{\sqrt{3}}$.
b. $x\sqrt{3} = x + 20 \Rightarrow x = \frac{20}{\sqrt{3}-1} = 10(\sqrt{3}+1)$. Por tanto, $h = 10(\sqrt{3}+1)$ m.
c. $h \approx 27{,}32$ m. Distancia de A: $x + 20 \approx 47{,}32$ m.
d. Con un solo ángulo hay dos incógnitas, la altura y la distancia al pie, y el pie de la torre no es accesible; la segunda medida da la ecuación que falta.

Solución del ejercicio 8

a. Los ángulos de un triángulo suman 180°: $C = 180^\circ - 70^\circ - 60^\circ = 50^\circ$.
b. Teorema del seno: cada lado es proporcional al seno del ángulo opuesto. AC se opone a $B = 60^\circ$ y $AB = 10$ a $C = 50^\circ$: $AC = \frac{10 \operatorname{sen} 60^\circ}{\operatorname{sen} 50^\circ} \approx 11{,}31$ km. Del mismo modo, $BC = \frac{10 \operatorname{sen} 70^\circ}{\operatorname{sen} 50^\circ} \approx 12{,}27$ km.
c. La distancia a la costa es la altura sobre AB. En el triángulo rectángulo que forma con AC: $h = AC \cdot \operatorname{sen} 70^\circ \approx 11{,}31 \cdot 0{,}9397 \approx 10{,}62$ km.
d. El mayor ángulo es $A = 70^\circ$ y su lado opuesto, $BC \approx 12{,}27$ km, es el mayor; el menor ángulo, $C = 50^\circ$, está opuesto al lado menor, $AB = 10$ km. Se cumple.

Solución del ejercicio 9

a. Conocemos dos lados y el ángulo que forman, así que usamos el teorema del coseno:
$AB^2 = 450^2 + 600^2 - 2 \cdot 450 \cdot 600 \cos 75^\circ \approx 202\,500 + 360\,000 - 139\,762 \approx 422\,738$.
Por tanto, $AB \approx 650{,}18$ m.
b. Despejamos el coseno del ángulo A, opuesto a $CB = 600$:
$\cos A = \frac{450^2 + 650{,}18^2 - 600^2}{2 \cdot 450 \cdot 650{,}18} \approx 0{,}4533$, luego $A \approx 63{,}05^\circ$.
c. Por la suma de ángulos: $B = 180^\circ - 75^\circ - 63{,}05^\circ \approx 41{,}95^\circ$. Es el menor ángulo y está opuesto al lado menor, $CA = 450$ m.
d. Días de obra: $\frac{650{,}18}{4{,}5} \approx 144{,}5$. Hacen falta unos 145 días.

Solución del ejercicio 10

a. Con dos lados y el ángulo comprendido:
$S = \frac{1}{2} \cdot 40 \cdot 55 \cdot \operatorname{sen} 65^\circ \approx 1\,100 \cdot 0{,}9063 \approx 996{,}94$ m².
b. El semiperímetro es $p = \frac{13+14+15}{2} = 21$. Por Herón:
$S = \sqrt{21 \cdot (21-13)(21-14)(21-15)} = \sqrt{21 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6} = \sqrt{7\,056} = 84$ dam².
c. Primera: $996{,}94$ m² $\approx 0{,}0997$ ha. Segunda: 84 dam² $= 8\,400$ m² $= 0{,}84$ ha.
d. Superficie total $\approx 0{,}0997 + 0{,}84 = 0{,}9397$ ha. Valor: $0{,}9397 \cdot 25\,000 \approx 23\,492$ €.

Solución del ejercicio 11

a. $\operatorname{sen} B = \frac{b \operatorname{sen} A}{a} = \frac{10 \operatorname{sen} 40^\circ}{8} \approx 0{,}8035$.
b. Hay dos ángulos entre 0° y 180° con ese seno: $B_1 \approx 53{,}46^\circ$ y $B_2 = 180^\circ - 53{,}46^\circ = 126{,}54^\circ$. Los dos son válidos porque $40^\circ + 126{,}54^\circ$.
c. Caso 1: $C \approx 86{,}54^\circ$ y $c = \frac{8 \operatorname{sen} 86{,}54^\circ}{\operatorname{sen} 40^\circ} \approx 12{,}42$ m. Caso 2: $C \approx 13{,}46^\circ$ y $c \approx 2{,}90$ m.
d. Saber si el ángulo B es agudo u obtuso, o conocer aproximadamente el lado c.

Solución del ejercicio 12

a. Los ángulos del triángulo ABT suman 180°: $T = 180^\circ - 62^\circ - 48^\circ = 70^\circ$.
b. Teorema del seno: AT se opone al ángulo $B = 48^\circ$ y $AB = 50$ al ángulo $T = 70^\circ$. Entonces $AT = \frac{50 \operatorname{sen} 48^\circ}{\operatorname{sen} 70^\circ} \approx 39{,}54$ m.
c. La anchura es la altura del triángulo sobre AB. En el triángulo rectángulo con hipotenusa AT: $h = AT \cdot \operatorname{sen} 62^\circ \approx 39{,}54 \cdot 0{,}8829 \approx 34{,}91$ m.
d. Del mismo modo, $BT = \frac{50 \operatorname{sen} 62^\circ}{\operatorname{sen} 70^\circ} \approx 46{,}98$ m, y $46{,}98 \cdot \operatorname{sen} 48^\circ \approx 34{,}91$ m. Coincide: el río mide unos 35 m de ancho.

Solución del ejercicio 13

a. En el paralelogramo de fuerzas, la resultante es la diagonal y forma un triángulo con una fuerza y el lado paralelo a la otra. Los ángulos consecutivos de un paralelogramo suman 180°, así que el ángulo opuesto a la resultante mide $180^\circ - 60^\circ = 120^\circ$.
b. Teorema del coseno: $R^2 = 300^2 + 400^2 - 2 \cdot 300 \cdot 400 \cos 120^\circ = 90\,000 + 160\,000 + 120\,000 = 370\,000$, porque $\cos 120^\circ = -\frac{1}{2}$. Por tanto, $R \approx 608{,}28$ N.
c. Teorema del seno: $\operatorname{sen} \theta = \frac{400 \operatorname{sen} 120^\circ}{608{,}28} \approx 0{,}5695$, luego $\theta \approx 34{,}72^\circ$. La resultante se inclina hacia la fuerza mayor.
d. En la misma dirección las fuerzas se suman: 700 N. Perpendiculares, por Pitágoras: $\sqrt{300^2 + 400^2} = 500$ N.

Solución del ejercicio 14

a. La pendiente es la tangente del ángulo de inclinación: $\tan \alpha = 0{,}08$, luego $\alpha = \operatorname{arctg} 0{,}08 \approx 4{,}57^\circ$.
b. Para subir 0,6 m con una pendiente del 8 % hace falta una distancia horizontal de $\frac{0{,}6}{0{,}08} = 7{,}5$ m.
c. La rampa es la hipotenusa del triángulo rectángulo de catetos 7,5 m y 0,6 m: $\sqrt{7{,}5^2 + 0{,}6^2} \approx 7{,}52$ m.

d. Con 5 m horizontales, la pendiente sería $\frac{0{,}6}{5} = 0{,}12$, es decir, un 12 %, con $\alpha \approx 6{,}84^\circ$. Supera el 8 %, así que no cumple la norma; habría que hacer la rampa en zigzag para ganar longitud.

Solución del ejercicio 15

a. Los puntos P, Q y el pie de la vertical H están alineados, con $PH = 5 + x$ y $QH = x$.
b. $h = x\tan 55^\circ$ y $h = (5 + x)\tan 40^\circ$.
c. $x(\tan 55^\circ - \tan 40^\circ) = 5\tan 40^\circ \Rightarrow x = \frac{5 \cdot 0{,}8391}{1{,}4281 - 0{,}8391} \approx 7{,}12$ km y $h = x\tan 55^\circ \approx 10{,}17$ km.
d. $QA = \frac{h}{\operatorname{sen} 55^\circ} \approx \frac{10{,}17}{0{,}8192} \approx 12{,}42$ km.
e. El ángulo en Q del triángulo PQA es $180^\circ - 55^\circ = 125^\circ$ y en A, $180^\circ - 40^\circ - 125^\circ = 15^\circ$. $QA = \frac{5 \operatorname{sen} 40^\circ}{\operatorname{sen} 15^\circ} \approx 12{,}42$ km. Coincide.

Solución del ejercicio 16

a. $AB^2 = 800^2 + 1\,200^2 - 2 \cdot 800 \cdot 1\,200 \cos 35^\circ \approx 507\,228$, así que $AB \approx 712{,}20$ m.
b. $\cos A = \frac{800^2 + 712{,}2^2 - 1\,200^2}{2 \cdot 800 \cdot 712{,}2} \approx -0{,}2569 \Rightarrow A \approx 104{,}89^\circ$.
c. El teorema del seno da $\operatorname{sen} A \approx 0{,}9665$, que corresponde a $75{,}11^\circ$ o a $104{,}89^\circ$. Como A está opuesto al lado mayor (1 200 m), es el ángulo mayor y debe ser el obtuso. El coseno no tiene esa ambigüedad.
d. $B = 180^\circ - 35^\circ - 104{,}89^\circ \approx 40{,}11^\circ$.
e. $712{,}2 \cdot 1{,}1 \cdot 18 \approx 14\,102$ €.

Solución del ejercicio 17

a. Los cinco triángulos iguales se reparten la vuelta completa: el ángulo central es $\frac{360^\circ}{5} = 72^\circ$. La apotema divide cada triángulo isósceles en dos rectángulos, con ángulo 36° en el centro.
b. En ese triángulo rectángulo, el medio lado es el cateto opuesto a 36° y el radio, la hipotenusa: $\frac{\ell}{2} = 10\operatorname{sen} 36^\circ$, así que $\ell = 20\operatorname{sen} 36^\circ \approx 11{,}76$ m.
c. La apotema es el cateto contiguo: $a = 10\cos 36^\circ \approx 8{,}09$ m.
d. Área de un polígono regular: $S = \frac{\text{perl metro} \cdot a}{2} = \frac{5 \cdot 11{,}76 \cdot 8{,}09}{2} \approx 237{,}76$ m². La barandilla rodea el perímetro: $5 \cdot 11{,}76 \approx 58{,}78$ m.
e. Cada triángulo tiene dos lados de 10 m que forman 72°: $5 \cdot \frac{1}{2} \cdot 10^2 \operatorname{sen} 72^\circ = 250 \cdot 0{,}9511 \approx 237{,}76$ m². Coincide.

Solución del ejercicio 18

a. El primer tramo forma 40° con el norte; el segundo, $180^\circ - 70^\circ = 110^\circ$. El giro es de 70°, así que el ángulo interior es $180^\circ - 70^\circ = 110^\circ$.
b. $d^2 = 30^2 + 20^2 - 2 \cdot 30 \cdot 20 \cos 110^\circ \approx 1\,300 + 410{,}4 = 1\,710{,}4 \Rightarrow d \approx 41{,}36$ km.
c. $\operatorname{sen}\theta = \frac{20 \operatorname{sen} 110^\circ}{41{,}36} \approx 0{,}4544 \Rightarrow \theta \approx 27{,}03^\circ$.
d. Rumbo $40^\circ + 27{,}03^\circ \approx 67^\circ$: N 67° E. Para volver, el contrario: S 67° O.
e. $\frac{41{,}36}{15} \approx 2{,}76$ h, unas 2 h 45 min.

Solución del ejercicio 19

a. La pendiente de una recta es la tangente de su inclinación: $\alpha = \operatorname{arctg} 2 \approx 63{,}43^\circ$ y $\beta = \operatorname{arctg} \frac{1}{3} \approx 18{,}43^\circ$.
b. $\tan(\alpha - \beta) = \dfrac{\tan\alpha - \tan\beta}{1 + \tan\alpha\tan\beta} = \dfrac{2 - \frac{1}{3}}{1 + 2 \cdot \frac{1}{3}} = \dfrac{5/3}{5/3} = 1$. El ángulo cuya tangente es 1 es 45°: las calles se cruzan formando 45°.
c. $63{,}43^\circ - 18{,}43^\circ = 45^\circ$, lo mismo que con la fórmula.
d. Si fueran perpendiculares, $\tan\alpha \cdot \tan\beta = -1$ y el denominador $1 + \tan\alpha\tan\beta$ sería 0: la tangente no existe, lo que corresponde a un ángulo de 90°.

Solución del ejercicio 20

a. Escribimos $3\alpha = 2\alpha + \alpha$ y aplicamos el coseno de la suma: $\cos 2\alpha \cos\alpha - \operatorname{sen} 2\alpha \operatorname{sen}\alpha$. Sustituyendo las fórmulas del ángulo doble, con $c = \cos\alpha$: $(2c^2 - 1)c - 2(1 - c^2)c = 2c^3 - c - 2c + 2c^3 = 4c^3 - 3c$.
b. Con $\alpha = 18^\circ$, $2\alpha = 36^\circ$ y $3\alpha = 54^\circ$, que suman 90°. El seno de un ángulo es el coseno de su complementario: $\operatorname{sen} 36^\circ = \cos 54^\circ$.
c. Sustituimos: $2sc = 4c^3 - 3c$. Dividiendo entre $c \neq 0$: $2s = 4c^2 - 3 = 4(1 - s^2) - 3 = 1 - 4s^2$, es decir, $4s^2 + 2s - 1 = 0$.
d. $s = \frac{-2 \pm \sqrt{4+16}}{8} = \frac{-1 \pm \sqrt{5}}{4}$. Como $\operatorname{sen} 18^\circ > 0$, $\operatorname{sen} 18^\circ = \frac{\sqrt{5}-1}{4} \approx 0{,}309$, valor que confirma la calculadora.