# Apuntes - Probabilidad

Curso: 1 Bachillerato Ciencias

En este tema aprenderás: experimentos y sucesos, regla de Laplace y propiedades, técnicas de recuento, probabilidad condicionada e independencia y probabilidad total y teorema de Bayes. Cada idea va en un cuadro de color, con ejemplos resueltos paso a paso.

**Actividad de introducción: ¿es justo el sorteo?**

Para decidir quién sale primero a exponer su trabajo, el profesor propone lanzar dos dados: si la suma es 7, sale Marta; si es 8, sale Diego. Diego protesta: «hay tres formas de sacar 7 (1+6, 2+5, 3+4) y tres de sacar 8 (2+6, 3+5, 4+4), así que es justo». ¿Tiene razón? Si distinguimos los dos dados, la suma 7 se obtiene de seis maneras y la suma 8 solo de cinco, porque $4+4$ cuenta una sola vez: Marta tiene ventaja. Este tipo de razonamientos, que parecen sencillos pero esconden trampas, son el objeto de la **probabilidad**. En este tema aprenderás a describir los sucesos de un experimento aleatorio, a contar casos con técnicas de recuento, a calcular probabilidades condicionadas, a decidir si dos sucesos son independientes y a «darle la vuelta» a una probabilidad con el teorema de Bayes, la herramienta que usan los médicos, los filtros de correo y los sistemas de inteligencia artificial.

## Experimentos y sucesos

**Definición: experimento aleatorio**

Un **experimento aleatorio** tiene resultados que no se pueden predecir con certeza. El **espacio muestral** $E$ es el conjunto de todos los resultados posibles; un **suceso** es un subconjunto de $E$. Con sucesos se opera como con conjuntos: unión $A \cup B$ (ocurre A o B), intersección $A \cap B$ (ocurren los dos) y complementario (no ocurre A). Dos sucesos son **incompatibles** si $A \cap B = \emptyset$.

**Propiedad**

La **frecuencia relativa** de un suceso, $f = \frac{\text{veces que ocurre}}{\text{repeticiones}}$, se estabiliza al repetir muchas veces el experimento (ley de los grandes números); esa estabilización justifica asignar probabilidades. Si una chincheta cae con la punta arriba 124 veces de 200, $f = 0{,}62$.

## Regla de Laplace y propiedades

**Propiedad**

Si todos los resultados son **equiprobables**: $P(A) = \frac{\text{casos favorables}}{\text{casos posibles}}$. Con un dado, $P(\text{par}) = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$. Con dos dados hay 36 resultados: la suma 7 sale de 6 formas, así que $P = \frac{6}{36} = \frac{1}{6}$.

**Observación**

Propiedades: $0 \le P(A) \le 1$; $P(E) = 1$; ;
$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$. Con $P(A) = 0{,}5$, $P(B) = 0{,}4$ y $P(A \cap B) = 0{,}2$: $P(A \cup B) = 0{,}7$. Para calcular «al menos uno» se usa el complementario: la probabilidad de obtener al menos un 6 en 3 dados es $1 - \left(\frac{5}{6}\right)^3 = \frac{91}{216} \approx 0{,}421$.

## Técnicas de recuento

**Propiedad: técnicas de recuento**

- **Regla del producto:** si una elección se hace en $m$ formas y otra en $n$, el total es $m \cdot n$.
- **Variaciones** (importa el orden, sin repetir): $V_{n,k} = \frac{n!}{(n-k)!}$. Números de 3 cifras distintas con los dígitos 1 a 9: $9 \cdot 8 \cdot 7 = 504$.
- **Variaciones con repetición:** $VR_{n,k} = n^k$. Contraseñas de 4 dígitos: $10^4$.
- **Permutaciones** de $n$ elementos: $P_n = n!$. Anagramas de MATES: $5! = 120$. Con repetidos: $\frac{n!}{a!\,b!\ldots}$; CASA: $\frac{4!}{2!} = 12$.
- **Combinaciones** (no importa el orden): $C_{n,k} = \binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$, con $\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$. Comisiones de 3 personas entre 10: $\binom{10}{3} = 120$.

**Regla**

La lotería de 6 números entre 49 tiene $\binom{49}{6} = 13\,983\,816$ combinaciones, así que $P(\text{acertar}) = \frac{1}{13\,983\,816}$.

## Probabilidad condicionada e independencia

**Propiedad**

La probabilidad de $A$ sabiendo que ha ocurrido $B$ es $P(A \mid B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$. De ahí, $P(A \cap B) = P(B)\,P(A \mid B)$. Los sucesos son **independientes** si $P(A \cap B) = P(A)P(B)$, o sea $P(A \mid B) = P(A)$. Al extraer sin reposición los sucesos son dependientes: de una urna con 5 bolas rojas y 3 azules, $P(2\text{ rojas}) = \frac{5}{8} \cdot \frac{4}{7} = \frac{5}{14}$.

**Ejemplo 1: sucesos independientes**

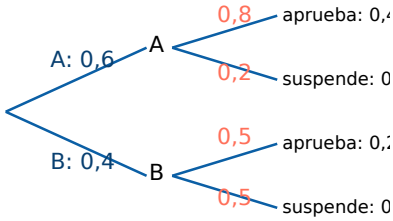
**Se lanzan un dado y una moneda. ¿Cuál es la probabilidad de obtener par y cara?**

Los sucesos son independientes: $P = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$.

## Probabilidad total y teorema de Bayes

### Propiedad

Si $A_1, A_2, \ldots$ forman una partición del espacio muestral, $P(B) = \sum P(A_i)P(B \mid A_i)$ (**probabilidad total**) y $P(A_i \mid B) = \frac{P(A_i)P(B|A_i)}{P(B)}$ (**teorema de Bayes**). Un **diagrama de árbol** lo organiza: las probabilidades de cada rama se multiplican y las de ramas finales distintas se suman.




### Ejemplo 2

**El 60 % de los alumnos va al grupo A y el 40 % al B; aprueban el 80 % de A y el 50 % de B.**

$P(\text{aprobar}) = 0{,}6 \cdot 0{,}8 + 0{,}4 \cdot 0{,}5 = 0{,}68$. Sabiendo que un alumno aprobó, la probabilidad de que sea de A es $\frac{0{,}48}{0{,}68} = \frac{12}{17} \approx 0{,}706$.

### Cómo se hace: aplicar probabilidad total y Bayes

1. Define los sucesos de la primera etapa (causas) y de la segunda (efecto).
2. Dibuja el árbol y escribe $P(A_i)$ y $P(B|A_i)$.
3. Probabilidad total: $P(B) = \sum P(A_i)P(B|A_i)$.
4. Bayes: $P(A_i|B) = \frac{P(A_i)P(B|A_i)}{P(B)}$.

### Ejemplo 3: defectuosos de dos máquinas

**La máquina A produce el 60 % de las piezas con un 2 % de defectuosas y la B el 40 % con un 5 %. Si una pieza es defectuosa, ¿cuál es la probabilidad de que venga de A?**

$P(D) = 0{,}6 \cdot 0{,}02 + 0{,}4 \cdot 0{,}05 = 0{,}032$. Por Bayes, $P(A|D) = \frac{0{,}012}{0{,}032} = 0{,}375$, un 37,5 %.

### ¡Atención! Errores frecuentes

- Aplicar Laplace cuando los resultados no son equiprobables.
- Usar variaciones cuando no importa el orden (o combinaciones cuando sí).
- Multiplicar probabilidades de sucesos dependientes como si fueran independientes.
- Confundir $P(A \mid B)$ con $P(B \mid A)$: en un test médico son muy distintas.

## Experimentos compuestos y diagramas de árbol

**Definición: experimento compuesto**

Un experimento es **compuesto** si está formado por varios experimentos simples realizados uno detrás de otro, como lanzar una moneda tres veces o sacar dos bolas de una urna. Se representa con un **diagrama de árbol**: cada nivel corresponde a una etapa, cada rama lleva su probabilidad y cada camino completo es un resultado del experimento. Las extracciones pueden ser **con reemplazamiento**, si se devuelve el objeto antes de la siguiente (etapas independientes), o **sin reemplazamiento**, si no se devuelve (la composición de la urna cambia).

**Cómo se hace: usar un diagrama de árbol**

1. Dibuja una rama por cada resultado de la primera etapa y escribe su probabilidad.
2. De cada rama salen las ramas de la etapa siguiente, con probabilidades condicionadas a lo ocurrido antes.
3. Las probabilidades de las ramas que salen de un mismo nudo suman 1.
4. La probabilidad de un camino es el producto de las probabilidades de sus ramas.
5. La probabilidad de un suceso es la suma de las probabilidades de los caminos que lo forman.

**Ejemplo 4**

**Una urna tiene 3 bolas rojas y 2 verdes. Se sacan dos sin reemplazamiento. ¿Cuál es la probabilidad de que la segunda sea roja?**

Hay dos caminos que terminan en roja: RR con probabilidad $\frac{3}{5} \cdot \frac{2}{4} = \frac{6}{20}$ y VR con probabilidad $\frac{2}{5} \cdot \frac{3}{4} = \frac{6}{20}$. Sumando, $P(\text{segunda roja}) = \frac{12}{20} = \frac{3}{5}$. Es la misma probabilidad que la de la primera: si no sabemos qué salió primero, la segunda bola es igual de probable que la primera.

## Tablas de contingencia

**Observación: cuándo usar una tabla**

Cuando una población se clasifica según dos características (por ejemplo, sexo y práctica de deporte), los datos se organizan en una **tabla de contingencia** de doble

entrada, con los totales de filas y columnas. Las probabilidades de la intersección se leen dividiendo una casilla entre el total, y las condicionadas dividiendo una casilla entre el total de su fila o columna. Una tabla y un diagrama de árbol contienen la misma información: se puede pasar de uno a otro.

### Ejemplo 5

**En un club de 200 socios, 120 juegan al pádel, 50 al tenis y 30 a los dos. ¿Son independientes los dos deportes?**

Con la tabla: $P(\text{pádel}) = \frac{120}{200} = 0{,}6$, $P(\text{tenis}) = \frac{50}{200} = 0{,}25$ y $P(\text{pádel} \cap \text{tenis}) = \frac{30}{200} = 0{,}15$. Como $0{,}6 \cdot 0{,}25 = 0{,}15$, sí son independientes: saber que un socio juega al tenis no cambia la probabilidad de que juegue al pádel, porque $P(\text{pádel} \mid \text{tenis}) = \frac{30}{50} = 0{,}6$.

## La ley de los grandes números

### Propiedad: frecuencia relativa y probabilidad

Si se repite un experimento muchas veces en las mismas condiciones, la frecuencia relativa de un suceso tiende a estabilizarse alrededor de un valor, que es su probabilidad. Esta **ley de los grandes números** permite estimar probabilidades cuando no se puede aplicar la regla de Laplace, por ejemplo cuando los resultados no son equiprobables (una chincheta que cae de punta o de lado) o cuando solo hay datos estadísticos (la probabilidad de lluvia o de que un componente falle).

### ¡Atención! la falacia del jugador

Si en una ruleta ha salido rojo diez veces seguidas, muchos piensan que «ahora toca negro». Es falso: las tiradas son independientes y la probabilidad sigue siendo la misma. La ley de los grandes números habla de lo que ocurre a largo plazo con la frecuencia relativa, no de que los resultados se «compensen». Tampoco confundas $P(A \mid B)$ con $P(B \mid A)$: la probabilidad de dar positivo estando enfermo puede ser altísima y la de estar enfermo habiendo dado positivo, baja.

### ¿Sabías que? Una carta que fundó una ciencia

La teoría de la probabilidad nació en 1654 en un intercambio de cartas entre Blaise Pascal y Pierre de Fermat sobre cómo repartir el dinero de una partida interrumpida. Un siglo después, el reverendo Thomas Bayes estudió cómo actualizar una probabilidad cuando se obtiene información nueva. Su teorema, publicado después de su muerte en 1763, es hoy la base de los filtros antispam, del diagnóstico médico y de muchos programas de inteligencia artificial.

### El consejo de Otto

Si la pregunta dice «al menos uno», calcula primero la probabilidad de «ninguno» y réstala de 1.