Soluciones - Probabilidad

Curso: 1 Bachillerato Ciencias

Solución del ejercicio 1

a. $E = \{CCC, CCX, CXC, CXX, XCC, XCX, XXC, XXX\}$: $2^3 = 8$ resultados.
b. $A = \{CCC, CCX, CXC, XCC\}$; $B = \{CCC, CCX, CXC, CXX\}$; $A \cap B = \{CCC, CCX, CXC\}$; $A \cup B = \{CCC, CCX, CXC, CXX, XCC\}$.
c. $P(A) = \frac{4}{8} = \frac{1}{2}$; $P(B) = \frac{1}{2}$; $P(A \cap B) = \frac{3}{8}$; $P(A \cup B) = \frac{5}{8}$. Comprobación: $\frac{1}{2} + \frac{1}{2} - \frac{3}{8} = \frac{5}{8}$.
d. $\bar{A}$: «sale como mucho una cara». $P(\bar{A}) = 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$.

Solución del ejercicio 2

a. $A \cup B = \{2, 4, 5, 6\}$, $P = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}$. $A \cap B = \{4, 6\}$, $P = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$.
b. $\bar{A} = \{1, 3, 5\}$ y $\bar{B} = \{1, 2, 3\}$: $\bar{A} \cap \bar{B} = \{1, 3\}$. Y . Coinciden.
c. No: tienen elementos comunes (4 y 6), así que $A \cap B \neq \varnothing$.
d. Por ejemplo, «sale 1 o 3»: no tiene elementos pares, pero no es $\bar{A}$ porque le falta el 5.

Solución del ejercicio 3

a. La tabla tiene sumas de 2 a 12; el 7 aparece en la diagonal secundaria.
b. Suma 7: $(1,6), (2,5), (3,4), (4,3), (5,2), (6,1)$, $P = \frac{6}{36} = \frac{1}{6}$. Al menos 10: sumas 10, 11 y 12, con $3 + 2 + 1 = 6$ casos, $P = \frac{1}{6}$.
c. Seis dobles: $P = \frac{6}{36} = \frac{1}{6}$.
d. Una suma 7 nunca es un doble (7 es impar): son incompatibles. $P = \frac{1}{6} + \frac{1}{6} = \frac{1}{3}$.

Solución del ejercicio 4

a. Por la fórmula de la unión, restando la intersección que se ha contado dos veces: $P(A \cup B) = 0{,}5 + 0{,}4 - 0{,}2 = 0{,}7$.
b. Por el suceso contrario: $P(\bar{A}) = 1 - 0{,}5 = 0{,}5$ y $P(\bar{B}) = 1 - 0{,}4 = 0{,}6$.
c. «A pero no B» es A sin la parte común con B: $P(A \cap \bar{B}) = P(A) - P(A \cap B) = 0{,}5 - 0{,}2 = 0{,}3$. En un diagrama de Venn es la zona de A que queda fuera de B.
d. Por De Morgan, «ni A ni B» es el contrario de la unión:
.

Solución del ejercicio 5

a. Cada una de las 4 posiciones puede ser cualquiera de las 10 cifras, se pueden repetir e importa el orden: variaciones con repetición, $10^4 = 10\,000$ códigos.
b. Importa el orden (oro, plata, bronce) y un atleta no puede ocupar dos puestos: $V_{8,3} = 8 \cdot 7 \cdot 6 = 336$ formas.
c. En una comisión no importa el orden y no hay repetición: combinaciones, $C_{10,3} = \binom{10}{3} = \frac{10 \cdot 9 \cdot 8}{3 \cdot 2 \cdot 1} = 120$ formas.
d. Se usan todas las letras y la R aparece dos veces; intercambiar las dos R no da una palabra nueva, así que dividimos: $\frac{5!}{2!} = \frac{120}{2} = 60$ palabras.

Solución del ejercicio 6

a. Sumamos filas y columnas: chicas $45 + 35 = 80$; chicos $50 + 20 = 70$; deporte $45 + 50 = 95$; no deporte $35 + 20 = 55$; total 150.
b. Por Laplace: $P(D) = \frac{95}{150} = \frac{19}{30} \approx 0{,}633$.
c. Al saber que es chica, el total pasa a ser 80: $P(D \mid \text{chica}) = \frac{45}{80} = \frac{9}{16} = 0{,}5625$.
d. Ahora el total son los 95 que practican deporte: $P(\text{chica} \mid D) = \frac{45}{95} = \frac{9}{19} \approx 0{,}474$.
e. No son independientes, porque $P(D \mid \text{chica}) = 0{,}5625 \neq P(D) \approx 0{,}633$: saber que es chica cambia la probabilidad de que practique deporte federado.

Solución del ejercicio 7

a. Primera extracción: F con $\frac{5}{8}$, L con $\frac{3}{8}$. Si sale F, quedan 4 F y 3 L: $\frac{4}{7}$ y $\frac{3}{7}$. Si sale L, quedan 5 F y 2 L: $\frac{5}{7}$ y $\frac{2}{7}$.
b. $P(FF) = \frac{5}{8} \cdot \frac{4}{7} = \frac{20}{56} = \frac{5}{14} \approx 0{,}357$.
c. $P(FL) + P(LF) = \frac{5}{8} \cdot \frac{3}{7} + \frac{3}{8} \cdot \frac{5}{7} = \frac{30}{56} = \frac{15}{28} \approx 0{,}536$.
d. Con reemplazamiento: $\frac{5}{8} \cdot \frac{5}{8} = \frac{25}{64} \approx 0{,}391$. Es mayor, porque al devolver el caramelo la segunda extracción no pierde un caramelo de fresa: las extracciones son independientes.

Solución del ejercicio 8

a. Los semáforos son independientes, así que multiplicamos: $P(\text{dos verdes}) = 0{,}6 \cdot 0{,}7 = 0{,}42$.
b. Usamos el contrario: ninguno en verde tiene probabilidad $0{,}4 \cdot 0{,}3 = 0{,}12$. Por tanto, $P(\text{al menos uno}) = 1 - 0{,}12 = 0{,}88$.
c. Hay dos casos: verde el primero y rojo el segundo, $0{,}6 \cdot 0{,}3 = 0{,}18$, o al revés, $0{,}4 \cdot 0{,}7 = 0{,}28$. Sumamos: $0{,}18 + 0{,}28 = 0{,}46$.
d. $P(0) + P(1) + P(2) = 0{,}12 + 0{,}46 + 0{,}42 = 1$. Es lógico: son todos los casos posibles y son incompatibles entre sí.

Solución del ejercicio 9

a. Cada lanzamiento tiene dos ramas, gol $(0{,}8)$ y fallo $(0{,}2)$; con tres niveles salen $2^3 = 8$ ramas finales, y la probabilidad de cada una es el producto de sus tres ramas.
b. Los tres goles forman un único camino: $0{,}8^3 = 0{,}512$.
c. Hay tres caminos con dos goles (GGF, GFG, FGG), cada uno con probabilidad $0{,}8^2 \cdot 0{,}2 = 0{,}128$: $3 \cdot 0{,}128 = 0{,}384$.
d. «Al menos uno» es el contrario de fallar los tres: $1 - 0{,}2^3 = 1 - 0{,}008 = 0{,}992$.
e. «Falla al menos uno» es el contrario de marcar los tres: $1 - 0{,}512 = 0{,}488$.

Solución del ejercicio 10

a. Primer nivel: lluvia (0,3) y no lluvia (0,7). Segundo nivel: tarde/a tiempo con 0,4/0,6 y 0,1/0,9.
b. Probabilidad total: $0{,}3 \cdot 0{,}4 + 0{,}7 \cdot 0{,}1 = 0{,}12 + 0{,}07 = 0{,}19$.
c. Bayes: $P(\text{lluvia} \mid \text{tarde}) = \frac{0{,}12}{0{,}19} \approx 0{,}632$.
d. Pasa de 0,3 a 0,632: saber que el autobús llegó tarde hace mucho más probable que lloviera, porque los retrasos son más frecuentes con lluvia.

Solución del ejercicio 11

a. $0{,}02 \cdot 0{,}95 + 0{,}98 \cdot 0{,}10 = 0{,}019 + 0{,}098 = 0{,}117$.
b. $\frac{0{,}019}{0{,}117} \approx 0{,}162$: solo un 16 %.
c. $P(\text{neg}) = 1 - 0{,}117 = 0{,}883$. $P(\text{sana} \mid \text{neg}) = \frac{0{,}98 \cdot 0{,}9}{0{,}883} \approx 0{,}9989$.
d. Como la enfermedad es rara, la mayoría de los positivos vienen del 10 % de falsos positivos de un grupo muy numeroso, el de los sanos. Por eso un positivo se confirma con una segunda prueba.

Solución del ejercicio 12

a. Fijado el día del primero, el segundo coincide con probabilidad $\frac{1}{365} \approx 0{,}0027$.
b. $\frac{365}{365} \cdot \frac{364}{365} \cdot \frac{363}{365} \cdots \frac{341}{365}$.
c. El producto vale aproximadamente $0{,}4313$, así que $P(\text{alguna coincidencia}) \approx 1 - 0{,}4313 = 0{,}5687$.
d. Es más probable que haya una coincidencia (57 %). No se compara un cumpleaños con los demás, sino todas las parejas posibles: $\binom{25}{2} = 300$ parejas.

Solución del ejercicio 13

a. $0{,}5 \cdot 0{,}02 + 0{,}3 \cdot 0{,}03 + 0{,}2 \cdot 0{,}05 = 0{,}010 + 0{,}009 + 0{,}010 = 0{,}029$: un 2,9 %.
b. $P(C \mid D) = \frac{0{,}010}{0{,}029} \approx 0{,}345$.
c. $P(A \mid D) = \frac{0{,}010}{0{,}029} \approx 0{,}345$ y $P(B \mid D) = \frac{0{,}009}{0{,}029} \approx 0{,}310$. Suman 1.
d. La C: aunque produce menos, tiene la mayor tasa de defectos (5 %). Las defectuosas vienen en igual proporción de A y C, pero arreglar C mejora más por pieza fabricada.

Solución del ejercicio 14

a. En una comisión no importa el orden, así que contamos combinaciones de 22 alumnos tomados de 3 en 3: $\binom{22}{3} = \frac{22 \cdot 21 \cdot 20}{6} = 1\,540$.
b. Casos favorables: elegir 3 de las 12 chicas, $\binom{12}{3} = 220$. Por Laplace, $\frac{220}{1\,540} = \frac{1}{7} \approx 0{,}143$.
c. «Al menos un chico» es el contrario de «las tres son chicas»: $1 - \frac{1}{7} = \frac{6}{7} \approx 0{,}857$.
d. Elegimos 2 chicas de 12 y 1 chico de 10: $\binom{12}{2} \cdot 10 = 66 \cdot 10 = 660$ casos. $P = \frac{660}{1\,540} = \frac{3}{7} \approx 0{,}429$.

Solución del ejercicio 15

a. $\left(\frac{5}{6}\right)^4 = \frac{625}{1\,296} \approx 0{,}4823$.
b. $1 - 0{,}4823 = 0{,}5177$: algo más de la mitad, favorable.
c. $1 - \left(\frac{35}{36}\right)^{24} \approx 1 - 0{,}5086 = 0{,}4914$: menos de la mitad, desfavorable.
d. Sumar probabilidades solo vale para sucesos incompatibles; los lanzamientos pueden dar varios seises. La probabilidad de «al menos uno» se calcula con el contrario.
e. $1 - \left(\frac{35}{36}\right)^n > 0{,}5 \Rightarrow n > \frac{\ln 0{,}5}{\ln(35/36)} \approx 24{,}6$: hacen falta 25 lanzamientos.

Solución del ejercicio 16

a. $\frac{1}{3}$.
b. Gana solo si acertó al principio: $\frac{1}{3}$.
c. Si eligió cabra (probabilidad $\frac{2}{3}$), el presentador abre la otra cabra y la puerta restante tiene el coche: cambiando gana con probabilidad $\frac{2}{3}$.
d. En 3 de los 9 casos la elección coincide con el coche (cambiar pierde); en los otros 6 cambiar gana: $\frac{6}{9} = \frac{2}{3}$.
e. No: si el presentador no tiene información, cuando abre una cabra las dos puertas restantes quedan con probabilidad $\frac{1}{2}$ cada una. La clave es que el presentador sabe dónde está el coche.

Solución del ejercicio 17

a. ESO: 80; Bachillerato: 80; andando: 60; autobús: 80; coche: 20; total: 160.
b. $P(\text{bus}) = \frac{80}{160} = \frac{1}{2}$; $P(\text{ESO}) = \frac{80}{160} = \frac{1}{2}$.
c. $P(\text{bus} \mid \text{Bach}) = \frac{50}{80} = \frac{5}{8} = 0{,}625$.
d. $P(\text{ESO} \mid \text{andando}) = \frac{40}{60} = \frac{2}{3} \approx 0{,}667$.
e. No: $P(\text{ESO} \mid \text{andando}) = \frac{2}{3} \neq P(\text{ESO}) = \frac{1}{2}$. Los de ESO van más andando (viven más cerca) y los de Bachillerato usan más el autobús: el AMPA debería pedir líneas pensando sobre todo en Bachillerato.

Solución del ejercicio 18

a. $0{,}9 \cdot 0{,}95 = 0{,}855$.
b. $1 - (1 - 0{,}9)(1 - 0{,}95) = 1 - 0{,}1 \cdot 0{,}05 = 0{,}995$.
c. Bloque paralelo: $1 - 0{,}2 \cdot 0{,}2 = 0{,}96$. Total: $0{,}9 \cdot 0{,}96 = 0{,}864$.
d. $0{,}9 \cdot 0{,}8 \cdot 0{,}8 = 0{,}576$, mucho menor que 0,864.
e. Con dos discos en paralelo, el sistema solo falla si fallan los dos a la vez, algo mucho menos probable que el fallo de uno solo: la redundancia aumenta la fiabilidad.

Solución del ejercicio 19

a. Primer nivel: spam (0,4) y normal (0,6). Segundo nivel: «gratis» con 0,3 y 0,02, respectivamente.
b. $0{,}4 \cdot 0{,}3 + 0{,}6 \cdot 0{,}02 = 0{,}12 + 0{,}012 = 0{,}132$.
c. $P(\text{spam} \mid \text{gratis}) = \frac{0{,}12}{0{,}132} \approx 0{,}909$. Supera el 90 %: lo envía a spam.
d. $P(\text{no gratis}) = 0{,}868$. $P(\text{normal} \mid \text{no gratis}) = \frac{0{,}6 \cdot 0{,}98}{0{,}868} \approx 0{,}677$.
e. Cada palabra aporta información; al combinar varias con el teorema de Bayes la probabilidad se acerca más a 0 o a 1 y el filtro se equivoca menos.

Solución del ejercicio 20

a. Ana necesita 1 victoria más y Bruno 2. Como cada partida la gana uno de los dos, como mucho se jugarían 2 partidas más.
b. Bruno solo gana si gana las dos siguientes partidas, cada una con probabilidad $\frac{1}{2}$ por ser igual de hábiles: $\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$.
c. Ana gana con probabilidad $1 - \frac{1}{4} = \frac{3}{4}$. Repartiendo los 64 € proporcionalmente: Ana $\frac{3}{4} \cdot 64 = 48$ € y Bruno $\frac{1}{4} \cdot 64 = 16$ €. Fue la solución que encontraron Pascal y Fermat.
d. Con 2 a 0, Bruno necesitaría ganar tres seguidas: $\left(\frac{1}{2}\right)^3 = \frac{1}{8}$. Ana se llevaría $\frac{7}{8} \cdot 64 = 56$ € y Bruno 8 €.