Soluciones del examen - Ecuaciones, inecuaciones y sistemas no lineales

Curso: 1 Bachillerato Ciencias · Duración: 55 minutos · /20

Solución del ejercicio 1 (4 puntos)

a. Por el teorema del resto, el resto de dividir entre $x-1$ es $P(1)=1+2-5-6=-8$. Como no es cero, $x=1$ no es raíz. Comprobación con otra raíz: $P(2)=8+8-10-6=0$.
b. Buscamos raíces entre los divisores de -6: $P(-1)=-1+2+5-6=0$. Ruffini con -1 da el cociente x^2+x-6, cuyas raíces son 2 y -3. Por tanto, $P(x)=(x+1)(x-2)(x+3)$.
c. Factorizamos también el denominador, $x^2-4=(x-2)(x+2)$, y simplificamos el factor común: $\dfrac{(x+1)(x-2)(x+3)}{(x-2)(x+2)}=\dfrac{(x+1)(x+3)}{x+2}$, para $x\neq 2$.

Solución del ejercicio 2 (4 puntos)

a. Es bicuadrada. Con el cambio $t=x^2$: $t^2-10t+9=0$, con $t=1$ o $t=9$. Deshaciendo el cambio, $x^2=1$ da $x=\pm 1$ y $x^2=9$ da $x=\pm 3$. Las cuatro soluciones son ± 1 y ± 3.
b. Elevamos al cuadrado los dos miembros: $x+7=x^2-10x+25$, es decir, $x^2-11x+18=0$, con $x=9$ o $x=2$. Al elevar al cuadrado pueden aparecer soluciones falsas, así que comprobamos: $\sqrt{16}=4=9-5$ sí; $\sqrt{9}=3\neq 2-5$ no. La única solución es $x=9$.

Solución del ejercicio 3 (4 puntos)

a. Despejamos x en la primera ecuación, $x=y+2$, y sustituimos en la segunda: $(y+2)y=15$, es decir, $y^2+2y-15=0$. También se puede despejar $y=x-2$; el resultado es el mismo.
b. Las soluciones son $y=3$ e $y=-5$. Si $y=3$, $x=5$; si $y=-5$, $x=-3$. Soluciones: $(5,3)$ y $(-3,-5)$. Comprobación: $5-3=2$ y $5\cdot 3=15$; $-3-(-5)=2$ y $(-3)(-5)=15$. La ecuación $y^2+2y-15=0$ tiene discriminante $4+60=64$, así que $y=\frac{-2\pm 8}{2}$. Hay dos soluciones porque la recta $x-y=2$ corta a la hipérbola $xy=15$ en dos puntos.

Solución del ejercicio 4 (3 puntos)

a. Las raíces de $x^2 - x - 12$ son $x = -3$ y $x = 4$. La parábola se abre hacia arriba, así que es negativa o nula entre las raíces, incluidas: $[-3, 4]$.
b. Los valores críticos son -2 (anula el numerador) y 1 (anula el denominador). Estudiando el signo en cada intervalo, la fracción es positiva en $(-\infty, -2)$ y en $(1, +\infty)$, y vale 0 en $x = -2$. Solución: $(-\infty, -2] \cup (1, +\infty)$; el 1 se excluye porque anula el denominador.

Solución del ejercicio 5 (5 puntos)

a. $x(x+4) = 96 \Rightarrow x^2 + 4x - 96 = 0 \Rightarrow x = 8$ o $x = -12$. Ancho 8 m y largo 12 m. La raíz negativa se descarta porque un ancho no puede ser negativo. Comprobación: $8 \cdot 12 = 96$.
b. $x^2 + 4x - 60 \geq 0$, raíces 6 y -10: $x \leq -10$ o $x \geq 6$. Con $x > 0$: $x \geq 6$. Discriminante: $16 + 240 = 256$, así que $x = \frac{-4 \pm 16}{2}$. Comprobación: $6 \cdot 10 = 60$.
c. $6 \leq x \leq 8$. El mayor es el de 8×12 m, con 96 m². El ancho mínimo, 6 m, da un huerto de 6×10 m con 60 m²; el máximo, 8 m, agota la tierra disponible.