Apuntes - Ecuaciones, inecuaciones y sistemas no lineales

Curso: 1 Bachillerato Ciencias

En este tema aprenderás: polinomios: división, Ruffini y factorización, ecuaciones polinómicas, racionales e irracionales, sistemas no lineales y inecuaciones. Cada idea va en un cuadro de color, con ejemplos resueltos paso a paso.

Actividad de introducción: el precio del viaje de fin de curso

La clase quiere alquilar un autobús que cuesta 900 € para el viaje de fin de curso. El delegado observa que si en lugar de x alumnos se apuntasen 6 más, cada uno pagaría 5 € menos. Para saber cuántos van, hay que resolver $\frac{900}{x} - \frac{900}{x+6} = 5$, una **ecuación racional**. Al quitar denominadores aparece $x^2 + 6x - 1\,080 = 0$, una ecuación de segundo grado con solución $x = 30$. En la vida real aparecen muchas ecuaciones de este tipo: con fracciones, con raíces, de grado mayor que 2, o sistemas en los que las incógnitas se multiplican. También aparecen desigualdades: un beneficio que debe ser positivo, una altura que debe superar un valor, un presupuesto que no se puede pasar. En este tema aprenderás a factorizar polinomios, a resolver ecuaciones polinómicas, racionales e irracionales, sistemas no lineales e inecuaciones, comprobando siempre que las soluciones tienen sentido.

Polinomios: división, Ruffini y factorización

Propiedad

Dividir un polinomio $P(x)$ entre $x - a$ se hace con la **regla de Ruffini**. El **teorema del resto** dice que el resto es $P(a)$. Si $P(a) = 0$, entonces a es una **raíz** y $x - a$ es un factor de $P(x)$. Las raíces enteras de un polinomio con coeficientes enteros son divisores del término independiente.

Ejemplo 1

Factorizar $P(x) = x^3 - 2x^2 - 5x + 6$. Probamos $x = 3$: coeficientes $1, -2, -5, 6$; bajamos 1; $3 \cdot 1 = 3$ y $-2 + 3 = 1$; $3 \cdot 1 = 3$ y $-5 + 3 = -2$; $3 \cdot (-2) = -6$ y $6 - 6 = 0$. El resto es 0 y el cociente es $x^2 + x - 2 = (x + 2)(x - 1)$. Luego $P(x) = (x - 3)(x + 2)(x - 1)$ y las raíces son $3, -2, 1$.

Ecuaciones polinómicas, racionales e irracionales

Propiedad

Polinómicas. Se pasa todo a un lado, se factoriza (sacar factor común, Ruffini,

identidades notables) y se iguala a cero cada factor. Una **bicuadrada** $ax^4+bx^2+c=0$ se resuelve con el cambio $t=x^2$: $x^4-13x^2+36=0$ da $t^2-13t+36=0$, $t=9$ o $t=4$, y por tanto $x=\pm 3, \pm 2$.

Propiedad

Racionales. Se multiplica por el denominador común (el mcm) y se resuelve la ecuación resultante. Hay que *comprobar* que ninguna solución anula un denominador. Por ejemplo, $\frac{x}{x-3}=\frac{9}{x^2-3x}$ se multiplica por $x(x-3)$: $x^2=9$. Pero $x=3$ anula el denominador, así que la única solución es $x=-3$.

Propiedad

Irracionales. Se aísla una raíz, se eleva al cuadrado y se repite si queda otra. Al elevar al cuadrado pueden aparecer soluciones falsas, así que *siempre se comprueba*. Ejemplo: $\sqrt{x+7}=x+1 \Rightarrow x+7=x^2+2x+1 \Rightarrow x^2+x-6=0 \Rightarrow x=2$ o $x=-3$. Con $x=2$: $3=3$ es correcto; con $x=-3$: $2\neq -2$, no vale. Solución: $x=2$.

Propiedad

Exponenciales sencillas. Se saca factor común o se iguala la base: $2^{x+1}+2^x=24 \Rightarrow 2^x(2+1)=24 \Rightarrow 2^x=8 \Rightarrow x=3$.

Cómo se hace: resolver una ecuación polinómica de grado mayor que 2

1. Pasa todo a un miembro y ordena el polinomio.
2. Busca raíces enteras entre los divisores del término independiente y aplica Ruffini.
3. Factoriza hasta que el cociente sea de grado 2 y resuélvelo con la fórmula.
4. Escribe todas las soluciones reales y comprueba.

Ejemplo 2: ecuación irracional

Resuelve $\sqrt{x+2}=x$.

Elevamos al cuadrado: $x+2=x^2$, es decir, $x^2-x-2=0$, con $x=2$ o $x=-1$. Al comprobar, $x=2$ cumple $\sqrt{4}=2$, pero $x=-1$ da $\sqrt{1}=1\neq -1$. La única solución es $x=2$.

Sistemas no lineales

Propiedad

Cuando una ecuación es lineal se despeja una incógnita y se **sustituye** en la otra.

Para $x+y=5$, $xy=6$: $y=5-x$, luego $x(5-x)=6$, es decir $x^2-5x+6=0$ y $x=2$ o $x=3$; las soluciones son $(2,3)$ y $(3,2)$. Si el sistema es $x^2-y^2=15$, $x+y=5$, se factoriza $(x-y)(x+y)=15$, así que $x-y=3$ y se obtiene $x=4$, $y=1$. Geométricamente, cada solución es un punto de corte de las dos curvas.

Inecuaciones

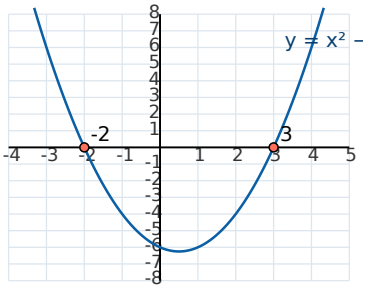
Observación

Las de primer grado se resuelven como ecuaciones, pero **al multiplicar o dividir por un número negativo se invierte la desigualdad**. Para las de grado superior o racionales: (1) se pasa todo a un miembro y se compara con 0; (2) se hallan las raíces del numerador y del denominador; (3) se estudia el signo en cada intervalo (tabla de signos); (4) se escribe la solución, con corchete solo si el extremo anula el numerador y la desigualdad no es estricta. Los ceros del denominador nunca se incluyen.

Ejemplo 3

x^2-x-6.

Las raíces de $x^2-x-6=0$ son -2 y 3. La parábola, abierta hacia arriba, queda por debajo del eje entre ellas: solución $(-2,3)$.



Ejemplo 4

$\frac{x-1}{x+2}\geq 0$.

El numerador se anula en 1 y el denominador en -2. Para x el cociente es $\frac{-}{-}=+$; entre -2 y 1 es $\frac{-}{+}=-$; para $x>1$ es $+$. Solución: $(-\infty,-2)\cup[1,+\infty)$.

¡Atención! Errores frecuentes

- No comprobar las soluciones de ecuaciones racionales e irracionales.
- Olvidar invertir el sentido de la desigualdad al multiplicar por un negativo.
- Simplificar x en ambos lados de una inecuación (se pierden soluciones o se cambia el signo): hay que pasar todo a un miembro.
- Elevar al cuadrado sin haber aislado antes la raíz: $(\sqrt{a}+b)^2\neq a+b^2$.

Teoremas del resto y del factor

Teorema del resto y teorema del factor

El resto de la división de un polinomio $P(x)$ entre $x-a$ es igual al valor numérico $P(a)$. En consecuencia, $x-a$ es un factor de $P(x)$ si y solo si $P(a)=0$, es decir, si a es una raíz. Además, si un polinomio con coeficientes enteros tiene una raíz entera, esta es un divisor de su término independiente. Por eso, para buscar raíces se prueban los divisores del término independiente, empezando por los más pequeños.

Ejemplo 5

Halla m para que $P(x)=2x^3-mx^2+x+6$ sea divisible entre $x+1$, y factoriza el resultado.

Debe cumplirse $P(-1)=0$: $-2-m-1+6=0 \Rightarrow m=3$. Con $m=3$, $P(x)=2x^3-3x^2+x+6$. Ruffini con -1: coeficientes $2,\ -3,\ 1,\ 6$ y se obtiene $2,\ -5,\ 6$ con resto 0. El cociente $2x^2-5x+6$ tiene discriminante $25-48$, así que $P(x)=(x+1)(2x^2-5x+6)$ y no se puede factorizar más en los reales.

Fracciones algebraicas

Definición: fracción algebraica

Una **fracción algebraica** es un cociente de polinomios $\frac{P(x)}{Q(x)}$, con $Q(x)$ no nulo. Dos fracciones son equivalentes si $P_1Q_2=P_2Q_1$. Se simplifican dividiendo numerador y denominador por un factor común, y para sumarlas se busca el mínimo común múltiplo de los denominadores factorizados, como con las fracciones numéricas. Hay que recordar siempre los valores que anulan el denominador, porque en ellos la fracción no existe.

Cómo se hace: sumar fracciones algebraicas

1. Factoriza todos los denominadores.
2. Calcula el mínimo común múltiplo: factores comunes y no comunes con el mayor exponente.
3. Divide el m.c.m. entre cada denominador y multiplica el resultado por su numerador.
4. Suma los numeradores, simplifica y factoriza si es posible.

Ecuaciones bicuadradas y de grado superior

Cómo se hace: ecuaciones bicuadradas

1. Una ecuación $ax^4 + bx^2 + c = 0$ se llama bicuadrada.
2. Haz el cambio $t = x^2$ y resuelve $at^2 + bt + c = 0$.
3. Para cada solución $t \geq 0$, deshaz el cambio: $x = \pm\sqrt{t}$. Las soluciones t no dan soluciones reales.
4. Una bicuadrada puede tener 0, 2, 3 o 4 soluciones reales.

Sistemas de ecuaciones no lineales

Observación: interpretación geométrica

Resolver un sistema de dos ecuaciones con dos incógnitas es encontrar los puntos comunes de dos curvas. Una recta y una parábola pueden cortarse en 0, 1 o 2 puntos; una recta y una circunferencia, también; dos parábolas, hasta en 4 puntos. Los métodos son los mismos que en los sistemas lineales: sustitución (el más habitual), igualación y reducción, que funciona bien cuando las incógnitas aparecen al cuadrado en las dos ecuaciones.

Ejemplo 6

Resuelve $\begin{cases} x^2 + y^2 = 10 \\ x + y = 4 \end{cases}$ e interpreta el resultado.

De la segunda, $y = 4 - x$. Sustituyendo:
$x^2 + (4 - x)^2 = 10 \Rightarrow 2x^2 - 8x + 6 = 0 \Rightarrow x^2 - 4x + 3 = 0$, con $x = 1$ o $x = 3$.
Entonces $y = 3$ o $y = 1$. Soluciones: $(1, 3)$ y $(3, 1)$. Son los dos puntos donde la recta $x + y = 4$ corta a la circunferencia de centro el origen y radio $\sqrt{10}$.

Inecuaciones

Cómo se hace: inecuaciones polinómicas y racionales con una tabla de signos

1. Pasa todos los términos a un miembro para comparar con 0.
2. Factoriza el numerador y el denominador y halla los valores críticos (raíces de ambos).
3. Ordena los valores críticos en la recta y estudia el signo de cada factor en cada intervalo.
4. Elige los intervalos con el signo pedido. Incluye las raíces del numerador si la desigualdad es $\leq$ o $\geq$, pero nunca las del denominador.

Definición: sistema de inecuaciones con dos incógnitas

La solución de una inecuación lineal $ax + by \leq c$ es un **semiplano**: la recta $ax + by = c$ divide el plano en dos partes y se elige la que cumple la desigualdad

probando un punto, por ejemplo el origen. La solución de un sistema es la intersección de los semiplanos, llamada **región factible**. Estas regiones se usan en programación lineal para optimizar recursos en empresas.

¿Sabías que? Ruffini y las ecuaciones imposibles

Paolo Ruffini, médico y matemático italiano, publicó en 1804 su método para dividir entre $x - a$. Pero es más famoso por haber afirmado, antes que nadie, que no existe una fórmula con raíces para resolver todas las ecuaciones de quinto grado. Su demostración tenía lagunas, y fue el noruego Niels Abel quien la completó en 1824. Por eso hoy hablamos del teorema de Abel-Ruffini.

El consejo de Otto

Para una inecuación, dibuja siempre un esbozo de la gráfica o una tabla de signos: es la forma más segura de no equivocarte con los intervalos.