Ejercicios - Ecuaciones, inecuaciones y sistemas no lineales

Curso: 1 Bachillerato Ciencias · 20

Se debe mostrar el desarrollo de cada ejercicio.

Ejercicio 1

Ejercicio 1 – División de polinomios

Divide $P(x) = 2x^3 - 3x^2 + 4x - 5$ entre $Q(x) = x^2 - x + 1$ siguiendo el algoritmo de la división.

a. Calcula el cociente $C(x)$ y el resto $R(x)$.
b. Comprueba que se cumple $P(x) = Q(x) \cdot C(x) + R(x)$.
c. ¿Qué grado tiene el resto? ¿Por qué debe ser menor que el del divisor?

Ejercicio 2

Ejercicio 2 – Ruffini y el teorema del resto

Sea $P(x) = x^3 - 4x^2 + x + 6$.

a. Divide $P(x)$ entre $x - 2$ por Ruffini e indica cociente y resto.
b. Calcula $P(-1)$ y deduce si $x + 1$ es un factor de $P(x)$.
c. Halla k para que $x^3 + kx^2 - 4$ sea divisible entre $x - 2$.
d. Enuncia el teorema del resto con tus palabras.

Ejercicio 3

Ejercicio 3 – Factorizar polinomios

Factoriza los polinomios siguientes y escribe sus raíces. Saca factor común, usa identidades notables o busca raíces entre los divisores del término independiente.

a. $x^3 - 4x^2 + x + 6$
b. $x^4 - 5x^2 + 4$
c. $2x^3 - 8x$
d. $x^3 - 6x^2 + 9x$

Ejercicio 4

Ejercicio 4 – Fracciones algebraicas

Las fracciones algebraicas se simplifican y operan como las numéricas, factorizando numerador y denominador.

a. Simplifica $\dfrac{x^2-9}{x^2+x-6}$.
b. Calcula $\dfrac{1}{x-1}+\dfrac{2}{x+1}$.
c. Calcula $\dfrac{x^2-4}{x}\cdot\dfrac{3x}{x+2}$.
d. ¿Para qué valores de x no está definida la fracción del apartado a)?

Ejercicio 5

Ejercicio 5 – Ecuaciones polinómicas

Resuelve las ecuaciones. Para las bicuadradas usa el cambio $t=x^2$; para las de grado 3, Ruffini.

a. $x^4-13x^2+36=0$
b. $x^3-6x^2+11x-6=0$
c. $x^4-x^2-12=0$
d. $x^3-2x^2-x+2=0$

Ejercicio 6

Ejercicio 6 – Ecuaciones racionales e irracionales

En las racionales, multiplica por el mínimo común múltiplo de los denominadores; en las irracionales, aísla la raíz y eleva al cuadrado. En ambos casos, comprueba las soluciones.

a. $\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{x+3}=\dfrac{1}{2}$
b. $\sqrt{2x+3}=x$
c. $\sqrt{x+5}+1=x$

Ejercicio 7

Ejercicio 7 – Una caja de cartón

Una empresa de embalajes de Alicante fabrica cajas sin tapa a partir de planchas de cartón de 30×20 cm: recorta un cuadrado de lado x en cada esquina y dobla las solapas.

a. Expresa el volumen $V(x)$ de la caja y di qué valores puede tomar x.
b. Comprueba que $x=5$ da un volumen de 1 000 cm³.
c. Plantea $V(x)=1\,000$, divide por Ruffini entre $x-5$ y halla las demás soluciones.
d. ¿Qué soluciones tienen sentido? Da las medidas de las cajas posibles.

Ejercicio 8

Ejercicio 8 – El autobús de la excursión

Los alumnos de 1.º de Bachillerato de un instituto de Murcia alquilan un autobús por 600 € para ir a Cartagena. Si se apuntaran 5 alumnos más, cada uno pagaría 4 € menos.

a. Llama x al número de alumnos y escribe lo que paga cada uno.
b. Plantea la ecuación del enunciado.
c. Resuélvela y descarta la solución que no tenga sentido.
d. ¿Cuánto paga cada alumno? Comprueba la condición del enunciado.

Ejercicio 9

Ejercicio 9 – Dos grifos y un depósito

En una granja de Teruel, un depósito de agua se llena con dos grifos. El segundo tarda 2 horas más que el primero en llenarlo solo, y los dos juntos lo llenan en 2 horas y 24 minutos.

a. Expresa 2 h 24 min en horas.
b. Si el primero tarda x horas, ¿qué fracción del depósito llena cada grifo en una hora?
c. Plantea y resuelve la ecuación.
d. ¿Cuánto tarda cada grifo solo?

Ejercicio 10

Ejercicio 10 – El campo rectangular

Un agricultor de Albacete quiere cercar un campo rectangular con 70 m de valla. Sabe que la diagonal, por donde pasará un tubo de riego, mide 25 m.

a. Llama x e y a los lados y plantea un sistema de dos ecuaciones.
b. Resuelve el sistema por sustitución.
c. Calcula el área del campo.
d. ¿Habría solución si la diagonal midiera 20 m? Razónalo.

Ejercicio 11

Ejercicio 11 – El tobogán y la escalera

En el diseño de un parque infantil de Logroño, el perfil de un tobogán es la parábola $y = x^2 - 4x + 5$ y el de una pasarela es la recta $y = x + 1$ (en metros).

a. Plantea el sistema y resuélvelo por igualación.
b. Calcula los puntos donde se cortan los dos perfiles.
c. ¿En qué tramo está la pasarela por encima del tobogán?

d. ¿A qué altura mínima llega el tobogán?

Ejercicio 12

Ejercicio 12 – Inecuaciones de segundo grado

Para resolver una inecuación de segundo grado, calcula las raíces, dibuja la parábola o haz una tabla de signos.

a. $x^2 - 5x + 6$
b. $x^2 - 4 \geq 0$
c. $-x^2 + 2x + 8 > 0$
d. $x^2 + x + 1 > 0$

Ejercicio 13

Ejercicio 13 – Inecuaciones racionales

En una inecuación racional nunca se multiplica por el denominador sin saber su signo: se pasa todo a un miembro y se estudia el signo de la fracción.

a. $\dfrac{x-1}{x+3} \leq 0$
b. $\dfrac{2x+1}{x-2} > 1$
c. Explica por qué el punto $x = -3$ no se incluye en la solución de a) y el $x = 1$ sí.

Ejercicio 14

Ejercicio 14 – El beneficio de una empresa

Una pequeña empresa de Elche fabrica zapatillas. Su beneficio semanal, en miles de euros, es $B(x) = -x^2 + 40x - 300$, donde x son los centenares de pares fabricados.

a. ¿Cuál es el beneficio si fabrica 500 pares? ¿Y 2 000?
b. ¿Entre qué cantidades de producción obtiene beneficios? Resuelve $B(x) > 0$.
c. ¿Cuántos pares debe fabricar para obtener el beneficio máximo? ¿Cuál es ese beneficio?
d. ¿Para qué producción el beneficio supera los 75 000 €?

Ejercicio 15

Ejercicio 15 – La pastelería del barrio

Una pastelería de Valladolid prepara cada día tartas de chocolate (x) y de queso (y). Por falta de horno puede hacer como mucho 30 tartas al día, y por falta de nata, cada tarta de chocolate gasta el doble que una de queso, de forma que $2x + y \leq 50$. Obviamente, $x \geq 0$ e $y \geq 0$. El encargado quiere saber qué combinaciones son posibles

y cuál le deja más dinero.

Combinación	A	B	C	D
(x, y)	(10, 10)	(20, 5)	(25, 10)	(5, 20)

a. Escribe el sistema de inecuaciones que describe las combinaciones posibles.
b. Representa la región factible y halla sus vértices.
c. Indica si son posibles las combinaciones de la tabla.
d. Cada tarta de chocolate deja 8 € de beneficio y cada una de queso 6 €. Calcula el beneficio en cada vértice y di cuál es el mejor.
e. Explica por qué el máximo tiene que estar en un vértice de la región.

Ejercicio 16

Ejercicio 16 – Un lanzamiento en el estadio

En una prueba de atletismo en el estadio de Vallehermoso, una bola se lanza verticalmente hacia arriba desde 1,5 m de altura. Su altura, en metros, a los t segundos es $h(t) = -5t^2 + 20t + 1{,}5$. Los jueces disponen de una cámara que solo graba lo que ocurre por encima de 16,5 m, y quieren saber cuánto tiempo aparecerá la bola en la imagen.

a. Calcula la altura máxima y el instante en que se alcanza.
b. Plantea y resuelve la inecuación $h(t) > 16{,}5$.
c. ¿Durante cuántos segundos graba la cámara la bola?
d. ¿En qué instante cae la bola al suelo? Da el resultado con dos decimales.
e. ¿Por qué hay que descartar una de las soluciones del apartado anterior?

Ejercicio 17

Ejercicio 17 – El precio del menú

Un restaurante de Oviedo vende 200 menús diarios a 12 €. El dueño ha comprobado que por cada euro que sube el precio pierde 10 clientes. Quiere saber si le conviene subir el precio para ingresar al menos 2 560 € al día. Llama x a la subida en euros.

a. Escribe el precio, el número de menús y los ingresos $I(x)$ en función de x.
b. Plantea la inecuación $I(x) \geq 2\,560$ y simplifícala.
c. Resuélvela. ¿Qué observas?
d. ¿Cuál es el ingreso máximo posible? ¿Con qué precio?
e. ¿Qué otros factores debería tener en cuenta el dueño antes de decidir?

Ejercicio 18

Ejercicio 18 – La ruta en bicicleta

Una ciclista de Girona recorre una ruta de 60 km. Si hubiera ido 5 km/h más rápido, habría tardado una hora menos.

a. Si su velocidad es v, expresa el tiempo empleado.
b. Plantea la ecuación del enunciado.
c. Resuélvela y halla la velocidad y el tiempo.
d. Comprueba la solución.

Ejercicio 19

Ejercicio 19 – El depósito de la piscina

El ayuntamiento de un pueblo de Huesca construye un depósito con forma de ortoedro para el agua de la piscina municipal. El arquitecto lo diseña con un largo 3 m mayor que el ancho y una profundidad 1 m menor que el ancho. Necesita que el depósito tenga un volumen de 84 m³.

a. Si el ancho es x, escribe el volumen en función de x y desarróllalo.
b. Plantea la ecuación y busca una raíz entera entre los divisores de 84.
c. Factoriza por Ruffini y demuestra que no hay más soluciones reales.
d. Da las medidas del depósito.
e. Calcula cuántos litros caben y cuántos metros cuadrados de impermeabilizante hacen falta para el fondo y las paredes.

Ejercicio 20

Ejercicio 20 – Desafío: parámetros y sistemas simétricos

Resuelve con cuidado, discutiendo los casos.

a. Halla los valores de m para los que $x^2 + mx + 9 = 0$ tiene una raíz doble, dos raíces reales distintas o ninguna.
b. Resuelve el sistema $\begin{cases} x^2 + y^2 = 25 \\ xy = 12 \end{cases}$ usando $(x+y)^2$ y $(x-y)^2$.
c. Halla m para que una de las raíces de $x^2 - 7x + m = 0$ sea el doble de la otra.