Soluciones - Ecuaciones, inecuaciones y sistemas no lineales

Curso: 1 Bachillerato Ciencias

Solución del ejercicio 1

a. Primer término: $\frac{2x^3}{x^2} = 2x$; restamos $2x(x^2 - x + 1) = 2x^3 - 2x^2 + 2x$ y queda $-x^2 + 2x - 5$. Segundo término: -1; restamos $-(x^2 - x + 1)$ y queda $x - 4$. Cociente $C(x) = 2x - 1$ y resto $R(x) = x - 4$.
b. $(x^2 - x + 1)(2x - 1) = 2x^3 - x^2 - 2x^2 + x + 2x - 1 = 2x^3 - 3x^2 + 3x - 1$. Sumando $x - 4$: $2x^3 - 3x^2 + 4x - 5 = P(x)$.
c. Grado 1. La división termina cuando el resto tiene grado menor que el divisor, porque ya no se puede dividir más.

Solución del ejercicio 2

a. Coeficientes 1, -4, 1, 6 y raíz 2: se obtiene 1, -2, -3 y resto 0. Cociente $x^2 - 2x - 3$, resto 0.
b. $P(-1) = -1 - 4 - 1 + 6 = 0$: por el teorema del factor, $x + 1$ divide a $P(x)$.
c. Debe ser $P(2) = 0$: $8 + 4k - 4 = 0 \Rightarrow k = -1$.
d. El resto de dividir $P(x)$ entre $x - a$ es el valor numérico $P(a)$. Por eso $x - a$ es un factor si y solo si $P(a) = 0$.

Solución del ejercicio 3

a. Las raíces enteras deben dividir al término independiente, 6. Probando: $P(-1) = -1 - 4 - 1 + 6 = 0$, $P(2) = 8 - 16 + 2 + 6 = 0$ y $P(3) = 27 - 36 + 3 + 6 = 0$. Como es de grado 3 y tiene tres raíces, $P(x) = (x + 1)(x - 2)(x - 3)$.
b. Es bicuadrado: con $t = x^2$, $t^2 - 5t + 4 = (t - 1)(t - 4)$. Deshaciendo el cambio, $(x^2 - 1)(x^2 - 4)$, y cada factor es una diferencia de cuadrados: $(x - 1)(x + 1)(x - 2)(x + 2)$. Raíces ± 1 y ± 2.
c. Sacamos factor común $2x$ y aplicamos la diferencia de cuadrados: $2x(x^2 - 4) = 2x(x - 2)(x + 2)$. Raíces 0 y ± 2.
d. Factor común x; lo que queda es un cuadrado perfecto: $x(x^2 - 6x + 9) = x(x - 3)^2$. Raíces 0 y 3, esta última doble.

Solución del ejercicio 4

a. Factorizamos: el numerador es una diferencia de cuadrados, $(x-3)(x+3)$, y el denominador tiene raíces -3 y 2, $(x+3)(x-2)$. Simplificando el factor común: $\frac{x-3}{x-2}$.
b. El denominador común es $(x-1)(x+1)=x^2-1$. Ajustamos los numeradores: $\frac{(x+1)+2(x-1)}{x^2-1}=\frac{3x-1}{x^2-1}$.
c. Factorizamos antes de multiplicar para simplificar: $\frac{(x-2)(x+2)\cdot 3x}{x(x+2)}=3(x-2)=3x-6$, válido para $x\neq 0$ y $x\neq -2$.
d. Una fracción no está definida donde se anula su denominador original: $x^2+x-6=0$, es decir, $x=-3$ o $x=2$. Aunque al simplificar desaparezca el factor $x+3$, el valor -3 sigue excluido.

Solución del ejercicio 5

a. Es bicuadrada. Con $t=x^2$: $t^2-13t+36=0$, con $t=4$ o $t=9$. Deshaciendo el cambio: $x^2=4$ da $x=\pm 2$ y $x^2=9$ da $x=\pm 3$. Cuatro soluciones.
b. Probamos divisores de 6: $x=1$ es raíz porque $1-6+11-6=0$. Por Ruffini queda $x^2-5x+6=0$, con $x=2$ y $x=3$. Soluciones: 1, 2 y 3.
c. Con $t=x^2$: $t^2-t-12=0$, con $t=4$ o $t=-3$. $x^2=4$ da $x=\pm 2$; $x^2=-3$ no tiene solución real porque un cuadrado no puede ser negativo.
d. Agrupamos de dos en dos: $x^2(x-2)-(x-2)=(x-2)(x^2-1)=0$. Soluciones: 2, 1 y -1.

Solución del ejercicio 6

a. Multiplicando por $2x(x+3)$: $2(x+3)+2x=x(x+3)\Rightarrow x^2-x-6=0\Rightarrow x=3$ o $x=-2$. Ninguna anula los denominadores: las dos son válidas.
b. $2x+3=x^2\Rightarrow x^2-2x-3=0\Rightarrow x=3$ o $x=-1$. Comprobación: $\sqrt{9}=3$ sí; $\sqrt{1}=1\neq -1$ no. Solución: $x=3$.
c. $\sqrt{x+5}=x-1\Rightarrow x+5=x^2-2x+1\Rightarrow x^2-3x-4=0\Rightarrow x=4$ o $x=-1$. Comprobación: $\sqrt{9}+1=4$ sí; $\sqrt{4}+1=3\neq -1$ no. Solución: $x=4$.

Solución del ejercicio 7

a. Al recortar x en cada esquina, la base mide $(30-2x)$ por $(20-2x)$ y la altura es x: $V(x)=x(30-2x)(20-2x)$. Todas las medidas deben ser positivas, así que 0.
b. $V(5)=5\cdot(30-10)\cdot(20-10)=5\cdot 20\cdot 10=1\,000$ cm³.
c. Desarrollando, $4x^3-100x^2+600x-1\,000=0$, y dividiendo entre 4, $x^3-25x^2+150x-250=0$. Ruffini con 5 da el cociente $x^2-20x+50$, cuyas

raíces son $x = 10 \pm 5\sqrt{2}$, es decir, $17{,}07$ y $2{,}93$.

d. Solo $x = 5$ y $x \approx 2{,}93$ están entre 0 y 10. Las cajas posibles miden $20 \times 10 \times 5$ cm, o aproximadamente $24{,}14 \times 14{,}14 \times 2{,}93$ cm.

Solución del ejercicio 8

a. El precio total se reparte entre los x alumnos: cada uno paga $\dfrac{600}{x}$ euros.

b. Con $x + 5$ alumnos cada uno pagaría $\frac{600}{x+5}$, que es 4 € menos: $\dfrac{600}{x} - \dfrac{600}{x+5} = 4$.

c. Multiplicando por $x(x+5)$: $600(x+5) - 600x = 4x(x+5)$, es decir, $3\,000 = 4x^2 + 20x$, o $x^2 + 5x - 750 = 0$. Las soluciones son $x = 25$ y $x = -30$; se descarta -30 porque el número de alumnos es positivo.

d. Van 25 alumnos y cada uno paga $\frac{600}{25} = 24$ €. Con 30 alumnos pagarían $\frac{600}{30} = 20$ €, que son 4 € menos, como dice el enunciado.

Solución del ejercicio 9

a. 24 min $= 0{,}4$ h, así que $2{,}4$ h $= \frac{12}{5}$ h.

b. El primero llena $\frac{1}{x}$ y el segundo $\frac{1}{x+2}$ del depósito por hora.

c. $\dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{x+2} = \dfrac{5}{12} \Rightarrow 12(x+2) + 12x = 5x(x+2) \Rightarrow 5x^2 - 14x - 24 = 0 \Rightarrow x = \dfrac{14 \pm \sqrt{196 + 480}}{10} = \dfrac{14 \pm 26}{10}$, es decir, $x = 4$ o $x = -1{,}2$.

d. El primero tarda 4 horas y el segundo 6. Comprobación: $\frac{1}{4} + \frac{1}{6} = \frac{5}{12}$.

Solución del ejercicio 10

a. El perímetro da $2x + 2y = 70$, es decir, $x + y = 35$. La diagonal es la hipotenusa de un triángulo rectángulo de catetos x e y, así que, por Pitágoras, $x^2 + y^2 = 625$.

b. Despejamos $y = 35 - x$ y sustituimos: $x^2 + (35 - x)^2 = 625$, es decir, $2x^2 - 70x + 600 = 0$, o $x^2 - 35x + 300 = 0$. Las soluciones son $x = 20$ y $x = 15$, y entonces $y = 15$ o $y = 20$. Los lados miden 20 m y 15 m.

c. Área $= 20 \cdot 15 = 300$ m².

d. Con diagonal 20: $x^2 + (35 - x)^2 = 400$, es decir, $2x^2 - 70x + 825 = 0$, con discriminante $4\,900 - 6\,600$. No hay solución: con 35 m de semiperímetro la diagonal mínima, la del cuadrado, es $\frac{35}{\sqrt{2}} \approx 24{,}7$ m.

Solución del ejercicio 11

a. Igualamos las dos expresiones de y: $x^2 - 4x + 5 = x + 1$, es decir, $x^2 - 5x + 4 = 0$. Las soluciones son $x = 1$ y $x = 4$.

b. Sustituimos en la recta: para $x = 1$, $y = 2$; para $x = 4$, $y = 5$. Los perfiles se cortan en $(1, 2)$ y $(4, 5)$.
c. La pasarela está por encima si $x + 1 > x^2 - 4x + 5$, es decir, $x^2 - 5x + 4$. La parábola $x^2 - 5x + 4$ es negativa entre sus raíces: 1.
d. El tobogán es una parábola hacia arriba; su punto más bajo es el vértice, en $x = \frac{4}{2} = 2$, con $y = 4 - 8 + 5 = 1$. La altura mínima es 1 m.

Solución del ejercicio 12

a. Las raíces de $x^2 - 5x + 6$ son 2 y 3. Como la parábola se abre hacia arriba, es negativa entre las raíces: la solución es $(2, 3)$.
b. Las raíces de $x^2 - 4$ son ± 2. La parábola es positiva fuera de ellas y, al ser $\geq$, los extremos se incluyen: $(-\infty, -2] \cup [2, +\infty)$.
c. Multiplicamos por -1, cambiando el sentido: $x^2 - 2x - 8$. Sus raíces son -2 y 4, y la parábola es negativa entre ellas: $(-2, 4)$.
d. El discriminante es $1 - 4 = -3$: la parábola no corta al eje. Como el coeficiente principal es positivo, está siempre por encima: la desigualdad se cumple para todo $x \in \mathbb{R}$.

Solución del ejercicio 13

a. Valores críticos -3 y 1. Tabla de signos: la fracción es negativa en $(-3, 1)$ y vale 0 en $x = 1$. Solución: $(-3, 1]$.
b. $\dfrac{2x+1}{x-2} - 1 > 0 \Rightarrow \dfrac{x+3}{x-2} > 0$. Positiva en $(-\infty, -3) \cup (2, +\infty)$.
c. En $x = -3$ el denominador se anula y la fracción no existe; en $x = 1$ vale 0, que cumple ≤ 0.

Solución del ejercicio 14

a. 500 pares son $x = 5$ centenares: $B(5) = -25 + 200 - 300 = -125$, una pérdida de 125 000 €. 2 000 pares son $x = 20$: $B(20) = -400 + 800 - 300 = 100$, una ganancia de 100 000 €.
b. $B(x) > 0$ equivale a $x^2 - 40x + 300$. Las raíces son 10 y 30, y la parábola es negativa entre ellas: hay beneficio entre 1 000 y 3 000 pares, sin incluir los extremos.
c. B es una parábola hacia abajo; su máximo está en el vértice, $x = \frac{-40}{-2} = 20$. Debe fabricar 2 000 pares y obtiene 100 000 € de beneficio.
d. $-x^2 + 40x - 300 > 75$ equivale a $x^2 - 40x + 375$, con raíces 15 y 25: entre 1 500 y 2 500 pares.

Solución del ejercicio 15

a. 

b. Las rectas $x + y = 30$ y $2x + y = 50$ se cortan en $x = 20$, $y = 10$. Vértices: $(0, 0)$, $(25, 0)$, $(20, 10)$ y $(0, 30)$.

c. $(10, 10)$: sí. $(20, 5)$: sí. $(25, 10)$: no, porque $25 + 10 = 35 > 30$. $(5, 20)$: sí.

d. $(0, 0)$: 0 €; $(25, 0)$: 200 €; $(20, 10)$: $160 + 60 = 220$ €; $(0, 30)$: 180 €. El mejor es 20 de chocolate y 10 de queso.

e. El beneficio aumenta al alejarse del origen en la dirección $(8, 6)$; las rectas de igual beneficio se desplazan hasta tocar la región por última vez en un vértice.

Solución del ejercicio 16

a. Vértice en $t = \frac{-20}{-10} = 2$ s; $h(2) = -20 + 40 + 1{,}5 = 21{,}5$ m.

b. $-5t^2 + 20t - 15 > 0 \Rightarrow t^2 - 4t + 3$, con raíces 1 y 3: $t \in (1, 3)$.

c. Durante $3 - 1 = 2$ segundos.

d. $-5t^2 + 20t + 1{,}5 = 0 \Rightarrow t = \dfrac{20 \pm \sqrt{400 + 30}}{10}$; la positiva es $t \approx 4{,}07$ s.

e. La otra, $t \approx -0{,}07$, es negativa y no tiene sentido físico: corresponde a un instante anterior al lanzamiento.

Solución del ejercicio 17

a. Precio $12 + x$, menús $200 - 10x$ e $I(x) = (12 + x)(200 - 10x) = -10x^2 + 80x + 2\,400$.

b. $-10x^2 + 80x + 2\,400 \geq 2\,560 \Rightarrow 10x^2 - 80x + 160 \leq 0 \Rightarrow x^2 - 8x + 16 \leq 0$.

c. $(x - 4)^2 \leq 0$ solo se cumple para $x = 4$: hay una única subida que lo consigue.

d. El máximo de I está en el vértice, $x = 4$: precio 16 €, 160 menús e ingresos de 2 560 €.

e. Los costes de cada menú, la competencia de la zona y la satisfacción de los clientes habituales: el ingreso no es lo mismo que el beneficio.

Solución del ejercicio 18

a. Tiempo = distancia entre velocidad: $t = \dfrac{60}{v}$ horas.

b. A velocidad $v + 5$ tardaría $\frac{60}{v+5}$, una hora menos: $\dfrac{60}{v} - \dfrac{60}{v + 5} = 1$.

c. Multiplicando por $v(v + 5)$: $60(v + 5) - 60v = v(v + 5)$, es decir, $v^2 + 5v - 300 = 0$. Las soluciones son $v = 15$ y $v = -20$; se descarta la negativa. La ciclista va a 15

km/h y tarda $\frac{60}{15} = 4$ h.
d. A $15 + 5 = 20$ km/h tardaría $\frac{60}{20} = 3$ h, exactamente una hora menos que 4 h.

Solución del ejercicio 19

a. $V(x) = x(x+3)(x-1) = x^3 + 2x^2 - 3x$.
b. $x^3 + 2x^2 - 3x - 84 = 0$. Probando: $x = 4$ da $64 + 32 - 12 - 84 = 0$.
c. Cociente $x^2 + 6x + 21$, con discriminante $36 - 84$: no tiene raíces reales. La única solución es $x = 4$.
d. Ancho 4 m, largo 7 m y profundidad 3 m.
e. 84 m³ $= 84\,000$ L. Fondo $4 \cdot 7 = 28$ m² y paredes $2 \cdot 7 \cdot 3 + 2 \cdot 4 \cdot 3 = 42 + 24 = 66$ m²: en total 94 m².

Solución del ejercicio 20

a. $\Delta = m^2 - 36$. Raíz doble si $m = \pm 6$; dos raíces si m o $m > 6$; ninguna real si -6.
b. $(x+y)^2 = 25 + 24 = 49 \Rightarrow x + y = \pm 7$; $(x-y)^2 = 25 - 24 = 1 \Rightarrow x - y = \pm 1$. Soluciones: $(4, 3)$, $(3, 4)$, $(-3, -4)$ y $(-4, -3)$.
c. Raíces r y $2r$: suma $3r = 7 \Rightarrow r = \frac{7}{3}$; producto $m = 2r^2 = \frac{98}{9}$.