Apuntes - Números reales, vectores y relaciones

Curso: 1 Bachillerato Ciencias

En este tema aprenderás: los números reales, intervalos, entornos y valor absoluto, potencias de exponente racional y radicales, racionalización, notación científica, aproximación y error y pares de números reales y vectores. Cada idea va en un cuadro de color, con ejemplos resueltos paso a paso.

Actividad de introducción: ¿cuánto mide de verdad?

Dibuja un cuadrado de 1 dm de lado y mide su diagonal con una regla. Obtendrás algo como 14,1 cm. Con una regla mejor, quizá 14,14 cm. Pero el teorema de Pitágoras dice que mide exactamente $\sqrt{2}$ dm, y $\sqrt{2} = 1{,}41421356\ldots$ tiene infinitas cifras decimales que no se repiten nunca: ninguna regla podrá medirla con exactitud. Los números como $\sqrt{2}$, π o el número de oro son **irracionales**, y junto con los racionales forman los **números reales**, que llenan por completo la recta sin dejar huecos. En la práctica siempre trabajamos con aproximaciones, y por eso es tan importante saber qué **error** cometemos. En este tema repasarás los conjuntos numéricos, trabajarás con intervalos y valor absoluto, operarás con radicales y potencias de exponente fraccionario y usarás la notación científica para manejar números enormes o diminutos.

Los números reales

Propiedad

En Matemáticas I se trabaja con el conjunto $\mathbb{R}$ de los **números reales**, que reúne a los racionales $\mathbb{Q}$ (decimales exactos o periódicos, que se escriben como fracción) y a los irracionales (infinitas cifras sin periodo: $\sqrt{2}$, π, $\sqrt{7}$). Se cumple $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$. Cada número real corresponde a un punto de la recta y viceversa, por eso se pueden ordenar y medir distancias.

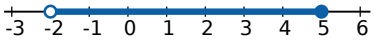
Propiedad

La **fracción generatriz** de un periódico se obtiene restando. Para $x = 1{,}2\overline{5}$: $10x = 12{,}\overline{5}$ y $100x = 125{,}\overline{5}$; restando, $90x = 113$, luego $x = \frac{113}{90}$.

Intervalos, entornos y valor absoluto

Definición: intervalo

Un **intervalo** es un tramo de la recta. El corchete incluye el extremo y el paréntesis no; el infinito siempre lleva paréntesis. Por ejemplo, $(-2, 5]$ representa -2.



Definición: valor absoluto

El **valor absoluto** $|x|$ es la distancia de x al origen, y $d(a, b) = |a - b|$ es la distancia entre dos puntos. Para resolver desigualdades con valor absoluto ($r > 0$):

- $|x - a|$, es decir, $x \in (a - r, a + r)$ (entorno de centro a y radio r).
- $|x - a| > r \iff x$ o $x > a + r$, es decir, dos semirrectas.

Ejemplo 1

$|2x - 1| \leq 5$ equivale a $-5 \leq 2x - 1 \leq 5$; sumando 1, $-4 \leq 2x \leq 6$, y dividiendo entre 2, $-2 \leq x \leq 3$. La solución es $[-2, 3]$.

Regla

La unión ($\cup$) reúne los puntos de ambos conjuntos y la intersección ($\cap$) deja solo los comunes. Si $A = [-3, 2)$ y $B = (0, 6]$, entonces $A \cap B = (0, 2)$ y $A \cup B = [-3, 6]$.

Cómo se hace: resolver una desigualdad con valor absoluto

1. $|x - a|$ equivale a $a - r$.
2. $|x - a| > r$ equivale a x o $x > a + r$.
3. Escribe la solución como intervalo o unión de intervalos y compruébala con un valor de prueba.

Potencias de exponente racional y radicales

Observación

Un radical es una potencia de exponente fraccionario: $\sqrt[n]{a^m} = a^{m/n}$. Con ello valen las propiedades de las potencias: $a^p \cdot a^q = a^{p+q}$, $\frac{a^p}{a^q} = a^{p-q}$, $(a^p)^q = a^{pq}$ y $a^{-p} = \frac{1}{a^p}$.

Ejemplo 2

$8^{2/3} = (\sqrt[3]{8})^2 = 2^2 = 4$ y $16^{-3/4} = \frac{1}{(\sqrt[4]{16})^3} = \frac{1}{8}$.

Propiedad

Para **simplificar** se extraen factores: $\sqrt{72} = \sqrt{2^3 \cdot 3^2} = 6\sqrt{2}$. Solo se pueden sumar radicales *semejantes* (mismo índice y mismo radicando): $\sqrt{50} + \sqrt{18} - \sqrt{8} = 5\sqrt{2} + 3\sqrt{2} - 2\sqrt{2} = 6\sqrt{2}$. Para multiplicar o dividir radicales de distinto índice se reducen a índice común: $\sqrt{2} \cdot \sqrt[3]{2} = 2^{1/2} \cdot 2^{1/3} = 2^{5/6} = \sqrt[6]{32}$.

Racionalización

Propiedad

Racionalizar es quitar los radicales del denominador. Si el denominador es $\sqrt{a}$, se multiplica arriba y abajo por $\sqrt{a}$: $\frac{6}{\sqrt{3}} = \frac{6\sqrt{3}}{3} = 2\sqrt{3}$. Si es un binomio con raíces, se multiplica por el **conjugado** y se usa $(a+b)(a-b) = a^2 - b^2$.

Ejemplo 3

$\frac{4}{\sqrt{5}-1} = \frac{4(\sqrt{5}+1)}{(\sqrt{5}-1)(\sqrt{5}+1)} = \frac{4(\sqrt{5}+1)}{5-1} = \sqrt{5}+1$.

Notación científica, aproximación y error

Propiedad

Un número está en notación científica si es $a \cdot 10^n$ con $1 \leq a$ y $n \in \mathbb{Z}$. Para multiplicar se multiplican las mantisas y se suman los exponentes: $(3 \cdot 10^5)(4 \cdot 10^{-8}) = 12 \cdot 10^{-3} = 1{,}2 \cdot 10^{-2}$. Al aproximar un valor real v por a se comete un **error absoluto** $E_a = |v - a|$ y un **error relativo** $E_r = \frac{E_a}{|v|}$, que suele darse en porcentaje.

Ejemplo 4

Se mide una pieza de 12,3 cm y su valor real es 12,26 cm.

El error absoluto es $E_a = |12{,}26 - 12{,}3| = 0{,}04$ cm y el relativo $E_r = \frac{0{,}04}{12{,}26} \approx 0{,}0033$, un $0{,}33\,\%$. Medir 2 cm con ese mismo error absoluto sería mucho peor: el error relativo mide la calidad de la aproximación en proporción al tamaño.

Ejemplo 5

Resolver $|x+2| \geq 1$: $x + 2 \geq 1 \Rightarrow x \geq -1$ o $x + 2 \leq -1 \Rightarrow x \leq -3$. Solución: $(-\infty, -3] \cup [-1, +\infty)$. Los puntos entre -3 y -1 quedan a distancia menor que 1 de -2.

Pares de números reales y vectores

Regla

Los pares ordenados $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ también se pueden sumar y multiplicar por un número real, componente a componente: $(2, -1) + (3, 4) = (5, 3)$ y $3 \cdot (2, -1) = (6, -3)$. Así se modelizan los vectores del plano, que se estudian a fondo en su propio capítulo.

¡Atención! Errores frecuentes

- Escribir $\sqrt{a+b} = \sqrt{a} + \sqrt{b}$: es falso ($\sqrt{9+16} = 5 \neq 7$).
- Confundir $|x|$ con dos casos separados: $|x|$ es un solo intervalo; $|x| > r$ son dos semirrectas.
- Poner corchete en el infinito.
- Sumar radicales no semejantes, como $\sqrt{2} + \sqrt{3} = \sqrt{5}$.

Representación de los números reales en la recta

Propiedad: la recta real no tiene huecos

A cada número real le corresponde un punto de la recta y a cada punto un número real. Entre dos números reales distintos, por cerca que estén, hay infinitos racionales e infinitos irracionales: se dice que ambos conjuntos son **densos**. Los racionales, sin embargo, dejan «agujeros» (como el punto que corresponde a $\sqrt{2}$), y los irracionales los rellenan. Por eso los números reales son el conjunto adecuado para medir longitudes, tiempos o temperaturas.

Cómo se hace: representar una raíz cuadrada con regla y compás

1. Escribe el radicando como suma de dos cuadrados: por ejemplo, $5 = 2^2 + 1^2$.
2. Dibuja un triángulo rectángulo con catetos 2 y 1 sobre la recta, con un vértice en el origen.
3. Su hipotenusa mide $\sqrt{5}$ por el teorema de Pitágoras.
4. Con el compás centrado en el origen, lleva la hipotenusa sobre la recta: el punto de corte es $\sqrt{5}$.

Aproximaciones: redondeo, truncamiento y cotas

Definición: redondeo, truncamiento y cota de error

Truncar un número a un orden es suprimir las cifras posteriores; **redondear** es

truncar y sumar una unidad a la última cifra conservada si la primera suprimida es 5 o mayor. Así, π truncado a las centésimas es 3,14 y redondeado a las milésimas, 3,142. Al redondear a un orden, el error absoluto es como máximo media unidad de ese orden: es la **cota del error absoluto**. Si se redondea a las centésimas, $E_a \leq 0{,}005$.

Ejemplo 6

Una cinta mide 1,37 m redondeado a los centímetros. ¿Entre qué valores está la medida real y cuál es la cota del error relativo?

La cota del error absoluto es media unidad del orden de los centímetros: 0,005 m. La medida real está en $[1{,}365;\ 1{,}375)$. La cota del error relativo es $\frac{0{,}005}{1{,}365} \approx 0{,}0037$, es decir, un 0,37 %. Si la misma cinta se usara para medir 10 cm, el error relativo sería diez veces mayor, en torno al 5 %.

Más sobre radicales

Regla: radicales semejantes y producto de radicales

Dos radicales son **semejantes** si tienen el mismo índice y el mismo radicando; solo los radicales semejantes se pueden sumar o restar, sumando sus coeficientes: $3\sqrt{5} + 4\sqrt{5} = 7\sqrt{5}$. Para multiplicar o dividir radicales de distinto índice, se reducen a índice común con el mínimo común múltiplo: $\sqrt{3} \cdot \sqrt[3]{2} = \sqrt[6]{3^3} \cdot \sqrt[6]{2^2} = \sqrt[6]{108}$. Y para extraer factores, se divide el exponente de cada factor entre el índice: el cociente sale fuera y el resto se queda dentro.

Ejemplo 7

Simplifica $\sqrt[3]{250} - 2\sqrt[3]{16} + \sqrt[3]{54}$.

Factorizamos: $250 = 2 \cdot 5^3$, $16 = 2^4$ y $54 = 2 \cdot 3^3$. Entonces $\sqrt[3]{250} = 5\sqrt[3]{2}$, $2\sqrt[3]{16} = 2 \cdot 2\sqrt[3]{2} = 4\sqrt[3]{2}$ y $\sqrt[3]{54} = 3\sqrt[3]{2}$. Los tres son semejantes: $5\sqrt[3]{2} - 4\sqrt[3]{2} + 3\sqrt[3]{2} = 4\sqrt[3]{2}$.

¡Atención! sumas en notación científica

Para multiplicar o dividir en notación científica basta con operar las mantisas y los exponentes, pero para **sumar o restar** hay que escribir antes los dos números con la misma potencia de 10. Por ejemplo, $4{,}2 \cdot 10^7 + 3 \cdot 10^6$ no es $7{,}2 \cdot 10^{13}$ ni $7{,}2 \cdot 10^7$: se escribe $3 \cdot 10^6 = 0{,}3 \cdot 10^7$ y el resultado es $4{,}5 \cdot 10^7$. Al final, comprueba siempre que la mantisa queda entre 1 y 10; si sale $12 \cdot 10^{-3}$, hay que escribir $1{,}2 \cdot 10^{-2}$.

Propiedades del valor absoluto

Propiedad: reglas del valor absoluto

Para todo par de números reales: $|a| \geq 0$ y solo vale 0 si $a = 0$; $|a \cdot b| = |a| \cdot |b|$; $|a + b| \leq |a| + |b|$ (desigualdad triangular); $|a| = \sqrt{a^2}$. Además, si $r > 0$: $|x|$ y $|x| > r \Leftrightarrow x$ o $x > r$. La expresión $|x - a|$ describe el **entorno** de centro a y radio r, que en el lenguaje cotidiano corresponde a frases como «un valor de a con un margen de r».

¿Sabías que? El secreto de los pitagóricos

Los pitagóricos creían que todo en el universo podía expresarse con razones de números enteros. Según la tradición, uno de ellos, Hipaso de Metaponto, descubrió que la diagonal de un cuadrado no es comparable con su lado, es decir, que $\sqrt{2}$ es irracional. La leyenda cuenta que fue expulsado de la escuela por revelar un hecho que contradecía sus creencias. Hoy sabemos que hay muchos más irracionales que racionales: en el siglo XIX, el matemático alemán Georg Cantor demostró que los racionales se pueden numerar uno a uno, como si se pusieran en una lista infinita, mientras que con los números reales eso es imposible.

¿Sabías que...?

Los pitagóricos creían que todo podía expresarse con fracciones. Cuenta la tradición que el descubrimiento de que la diagonal de un cuadrado de lado 1, es decir, $\sqrt{2}$, no es una fracción les causó un gran desconcierto. Hoy sabemos que entre dos números racionales cualesquiera hay infinitos irracionales, y que los irracionales son, en cierto sentido, muchísimos más que los racionales.

El consejo de Otto

Antes de racionalizar o sumar radicales, descompón siempre el radicando en factores primos: así ves enseguida qué sale fuera de la raíz.