Ejercicios - Números reales, vectores y relaciones

Curso: 1 Bachillerato Ciencias · 20

Se debe mostrar el desarrollo de cada ejercicio.

Ejercicio 1

Ejercicio 1 – Clasificar números

Considera los números $\sqrt{16}$, $-\frac{12}{4}$, $0{,}\overline{3}$, $\sqrt{7}$, π, $-2{,}5$ y $\frac{\sqrt{8}}{\sqrt{2}}$.

a. Indica cuáles son naturales, enteros, racionales e irracionales.
b. Explica por qué $0{,}\overline{3}$ es racional y π no lo es.
c. Escribe un número racional y otro irracional comprendidos entre $1{,}41$ y $1{,}42$.
d. ¿Es siempre irracional la suma de dos irracionales? Pon un ejemplo.

Ejercicio 2

Ejercicio 2 – La fracción generatriz

Todo decimal periódico es un número racional. Para hallar su fracción generatriz se multiplica por potencias de 10 y se restan las expresiones para eliminar el periodo.

a. Halla la fracción generatriz de $'$.
b. Halla la de $1{,}2\overline{5}$.
c. Halla la de $2{,}\overline{3}$.
d. Demuestra que $0{,}\overline{9} = 1$.

Ejercicio 3

Ejercicio 3 – Intervalos y operaciones

Sean $A = [-3, 2)$ y $B = (0, 6]$.

a. Representa los dos intervalos en la recta real y escribe cada uno como desigualdad.
b. Calcula $A \cap B$ y $A \cup B$.
c. Escribe como intervalo los números que cumplen -2 y los que cumplen $x \geq 3$.
d. Calcula $\mathbb{R} \setminus B$.

Ejercicio 4

Ejercicio 4 – Valor absoluto y entornos

El valor absoluto $|x-a|$ mide la distancia entre x y a en la recta real.

a. Resuelve $|x-3| \leq 2$ y expresa la solución como intervalo.
b. Resuelve $|2x+1| > 5$.
c. Resuelve $|x| = |x-4|$ e interpreta el resultado.
d. Escribe como intervalo el entorno de centro 2 y radio 0,5 y exprésalo con valor absoluto.

Ejercicio 5

Ejercicio 5 – Operaciones con radicales

Para operar con radicales, descompón los radicandos en factores primos y extrae los factores que puedas.

a. Simplifica $\sqrt{72}$ y $\sqrt[3]{54}$.
b. Calcula $\sqrt{50} + \sqrt{18} - \sqrt{8}$.
c. Calcula $\sqrt{12} \cdot \sqrt{27}$ y $\dfrac{\sqrt{90}}{\sqrt{10}}$.
d. Introduce el factor dentro de la raíz: $3\sqrt{2}$ y $2\sqrt[3]{5}$.

Ejercicio 6

Ejercicio 6 – Racionalizar denominadores

Racionalizar es eliminar las raíces del denominador. Si hay una sola raíz, se multiplica por ella; si hay una suma o resta, por el conjugado.

a. $\dfrac{6}{\sqrt{3}}$ y $\dfrac{5}{2\sqrt{5}}$
b. $\dfrac{4}{\sqrt{5}-1}$
c. $\dfrac{1}{\sqrt{3}+\sqrt{2}}$ y su valor aproximado.
d. $\dfrac{2}{\sqrt[3]{4}}$

Ejercicio 7

Ejercicio 7 – Potencias de exponente fraccionario

Recuerda que $a^{m/n} = \sqrt[n]{a^m}$. Calcula sin calculadora:

a. $8^{2/3}$ y $16^{-3/4}$
b. $27^{4/3}$
c. $\sqrt{2} \cdot \sqrt[3]{2}$ como un solo radical.

d. $\dfrac{\sqrt[4]{8}}{\sqrt{2}}$

Ejercicio 8

Ejercicio 8 – El tamaño de un folio

Los folios que usas en clase siguen la norma DIN: el formato A0 tiene un área de 1 m² y, al doblar una hoja por la mitad del lado largo, se obtiene el formato siguiente (A1, A2, …) con la misma forma. Para que eso ocurra, el cociente entre el lado largo y el corto debe ser $\sqrt{2}$.

a. Comprueba con un folio A4, de 297×210 mm, que el cociente se aproxima a $\sqrt{2}$.
b. Si el lado corto de A0 mide x, el largo mide $x\sqrt{2}$. Plantea la ecuación del área y calcula x de forma exacta como potencia de 2.
c. Calcula las medidas de A0 en metros con cuatro decimales.
d. Explica por qué, al doblar un rectángulo de lados x y $x\sqrt{2}$, el nuevo rectángulo tiene la misma proporción.

Ejercicio 9

Ejercicio 9 – Distancias en el espacio

En el planetario de Valencia se explica que la distancia media de la Tierra al Sol es $1{,}496 \cdot 10^{8}$ km y que la luz viaja a $3 \cdot 10^{5}$ km/s. Un año luz es la distancia que recorre la luz en un año, unos $9{,}46 \cdot 10^{12}$ km.

a. ¿Cuántos segundos tarda la luz del Sol en llegar a la Tierra? Exprésalo también en minutos.
b. La estrella más cercana, Próxima Centauri, está a 4,24 años luz. Expresa esa distancia en kilómetros en notación científica.
c. Un avión comercial vuela a 900 km/h. ¿Cuántos años tardaría en llegar a Próxima Centauri? (1 año ≈ 8 760 h)
d. ¿Cuántas cifras significativas tiene el dato $1{,}496 \cdot 10^{8}$ km?

Ejercicio 10

Ejercicio 10 – Lo muy pequeño

En el laboratorio de Biología se observa al microscopio una bacteria de $2 \cdot 10^{-6}$ m de longitud. Un adulto tiene unos 5 litros de sangre y en cada milímetro cúbico hay unos $5 \cdot 10^{6}$ glóbulos rojos.

a. ¿Cuántas bacterias puestas en fila cabrían en 1 cm?
b. Expresa 5 litros en milímetros cúbicos (1 L = 10^{6} mm³).
c. ¿Cuántos glóbulos rojos tiene aproximadamente un adulto? Da el resultado en

notación científica.

d. Un glóbulo rojo mide $7{,}5 \cdot 10^{-6}$ m de diámetro. Si se pusieran todos en fila, ¿qué longitud ocuparían en kilómetros?

Ejercicio 11

Ejercicio 11 – El carpintero y el error

En una carpintería de Cuenca se cortan dos piezas. La primera, cuyo valor real es 2,348 m, se mide como 2,35 m. La segunda, de 11,95 cm reales, se mide como 11,9 cm.

a. Calcula el error absoluto de cada medida.
b. Calcula el error relativo de cada una en porcentaje.
c. ¿Qué medida es de mejor calidad? Justifícalo.
d. Si el error absoluto máximo de una cinta métrica es 1 mm, ¿entre qué valores está realmente una tabla que mide 1,80 m?

Ejercicio 12

Ejercicio 12 – Tornillos con tolerancia

Una fábrica de Vitoria produce tornillos de 50 mm de longitud. Se aceptan los que tienen una longitud x con $|x - 50| \leq 0{,}2$ mm. El control de calidad mide cinco tornillos.

Tornillo	A	B	C	D	E
Longitud (mm)	49,75	49,9	50,15	50,25	50,2

a. Escribe como intervalo las longitudes aceptadas.
b. Indica qué tornillos de la tabla se aceptan.
c. Un cliente exige una tolerancia más estricta, $|x - 50|$. ¿Cuáles se aceptarían ahora?
d. Escribe con valor absoluto el conjunto de longitudes que se rechazan con la primera tolerancia.

Ejercicio 13

Ejercicio 13 – La temperatura del frigorífico

Las autoridades sanitarias recomiendan conservar los alimentos frescos a 4 °C, admitiendo una desviación máxima de 1,5 °C. Un comedor escolar de Burgos registra la temperatura de su cámara frigorífica cada mañana.

Día	L	M	X	J	V
T (°C)	4,1	5,8	3,6	2,2	4,8

a. Escribe la condición con valor absoluto y como intervalo.
b. ¿Qué días la temperatura estuvo fuera del rango recomendado?

c. Calcula la temperatura media de la semana y su distancia a 4 °C.
d. El técnico ajusta el aparato para que $|T - 4| \leq 0{,}8$. Escribe el nuevo intervalo.

Ejercicio 14

Ejercicio 14 – Aproximaciones de π

A lo largo de la historia se han usado distintas aproximaciones del número $\pi = 3{,}14159265\ldots$: Arquímedes usó $\frac{22}{7}$ y el astrónomo chino Zu Chongzhi, en el siglo V, $\frac{355}{113}$.

a. Calcula el error absoluto de las aproximaciones 3,14, $\frac{22}{7}$ y $\frac{355}{113}$.
b. Calcula el error relativo, en porcentaje, de 3,14 y de $\frac{22}{7}$.
c. Ordena las tres aproximaciones de mejor a peor.
d. Con 3,14, ¿qué error se comete al calcular la longitud de una pista circular de 50 m de radio?

Ejercicio 15

Ejercicio 15 – El número de oro

El número áureo $\varphi = \dfrac{1 + \sqrt{5}}{2}$ aparece en el arte, en la arquitectura y en la naturaleza.

Un rectángulo es áureo si el cociente entre su lado largo y su lado corto es φ. Muchos diseñadores dicen que es la proporción «más armoniosa», y un grupo de alumnos de un instituto de Salamanca decide comprobar si algunos objetos cotidianos la cumplen. Miden una tarjeta de transporte, de $85{,}6 \times 53{,}98$ mm, una hoja A4 y la fachada de un edificio del barrio.

a. Calcula φ con cuatro decimales y comprueba que es irracional (justifica a partir de $\sqrt{5}$).
b. Demuestra de forma exacta que $\varphi^2 = \varphi + 1$.
c. Demuestra que $\frac{1}{\varphi} = \varphi - 1$ racionalizando.
d. ¿Es áurea la tarjeta? Calcula el error relativo respecto de φ.
e. ¿Es áurea la hoja A4? Razona con el resultado del ejercicio 8.

Ejercicio 16

Ejercicio 16 – La diagonal del campo

Un campo de fútbol reglamentario de Primera División mide 105 m de largo y 68 m de ancho. El entrenador de un club de Sevilla pide a sus jugadores que corran varias veces la diagonal del campo y quiere saber exactamente cuántos metros recorren. Para planificar la sesión usa una aproximación entera y se pregunta qué error comete.

a. Calcula la diagonal de forma exacta, como raíz cuadrada, y comprueba que no se puede simplificar.

b. Aproxima la diagonal a las centésimas.
c. El entrenador redondea a 125 m. Calcula el error absoluto y el error relativo.
d. Si los jugadores corren la diagonal 20 veces, ¿cuántos metros de error acumula la aproximación?
e. ¿Tiene sentido dar la diagonal con cinco decimales? Justifícalo.

Ejercicio 17

Ejercicio 17 – La pantalla de la tableta

Las pantallas se venden por la longitud de su diagonal en pulgadas (1 pulgada = 2,54 cm). Una tableta tiene una pantalla de 10 pulgadas con formato 16:10, es decir, el ancho y el alto son proporcionales a 16 y 10. Marcos quiere comprar una funda y necesita conocer las medidas reales de la pantalla. La tienda solo indica la diagonal y el formato.

a. Llama $16k$ y $10k$ al ancho y al alto. Plantea la ecuación con el teorema de Pitágoras.
b. Calcula k de forma exacta y racionaliza el resultado.
c. Calcula el ancho y el alto en pulgadas con tres decimales.
d. Expresa el ancho y el alto en centímetros con dos decimales.
e. Calcula el área de la pantalla en pulgadas cuadradas de forma exacta.

Ejercicio 18

Ejercicio 18 – Pares de números y desplazamientos

Un dron de reparto se programa con pares de números reales (a, b), que indican cuántos metros avanza hacia el este y hacia el norte. Los pares se suman y se multiplican por un número componente a componente.

a. El dron hace el desplazamiento $u = (3, 4)$ y después $v = (-1, 2)$. Calcula el desplazamiento total $u + v$.
b. Calcula $3u$ y $u - 2v$.
c. Calcula la distancia en línea recta del desplazamiento u.
d. Halla los números reales a y b tales que $a(1, 2) + b(3, -1) = (7, 0)$.
e. Interpreta el apartado anterior: ¿cuántas veces debe repetir el dron cada movimiento?

Ejercicio 19

Ejercicio 19 – La cobertura de dos emisoras

Una emisora de radio está en el kilómetro 45 de una autovía de Castilla-La Mancha y se oye a menos de 30 km. Otra está en el kilómetro 100 y se oye a menos de 20 km. La autovía va del kilómetro 0 al 150. La empresa quiere saber qué tramos se quedan sin cobertura.

a. Escribe con valor absoluto y como intervalo los kilómetros donde se oye la primera emisora.
b. Haz lo mismo con la segunda.
c. Calcula la unión de los dos intervalos y los tramos de la autovía sin cobertura.
d. Se instala una tercera emisora en el kilómetro 135. ¿Qué radio mínimo necesita para cubrir el final de la autovía?
e. ¿Qué longitud total de autovía queda sin cobertura con las tres emisoras si la tercera tiene ese radio?

Ejercicio 20

Ejercicio 20 – Desafío: radicales encajados

Resuelve sin calculadora, usando el conjugado y las identidades notables.

a. Calcula $\dfrac{1}{2-\sqrt{3}}+\dfrac{1}{2+\sqrt{3}}$.
b. Desarrolla $(2+\sqrt{3})^2$ y deduce el valor de $\sqrt{7+4\sqrt{3}}$.
c. Calcula $\sqrt{7+4\sqrt{3}}-\sqrt{7-4\sqrt{3}}$.
d. Demuestra que $\sqrt{2}$ es irracional suponiendo que $\sqrt{2}=\frac{p}{q}$ con la fracción irreducible.