Soluciones - Números reales, vectores y relaciones

Curso: 1 Bachillerato Ciencias

Solución del ejercicio 1

a. $\sqrt{16} = 4$ y $\frac{\sqrt{8}}{\sqrt{2}} = \sqrt{4} = 2$ son naturales (y por tanto enteros y racionales). $-\frac{12}{4} = -3$ es entero. $0{,}\overline{3} = \frac{1}{3}$ y $-2{,}5 = -\frac{5}{2}$ son racionales. $\sqrt{7}$ y π son irracionales.

b. $0{,}\overline{3}$ es periódico y se escribe como la fracción $\frac{1}{3}$. π tiene infinitas cifras decimales sin periodo, así que no es cociente de enteros.

c. Racional: $1{,}415 = \frac{283}{200}$. Irracional: $\sqrt{2} \approx 1{,}41421\ldots$, que está entre los dos.

d. No: $\sqrt{2} + (-\sqrt{2}) = 0$, que es racional. La suma de un racional y un irracional sí es siempre irracional.

Solución del ejercicio 2

a. Llamamos $x = 0{,}1818\ldots$. Como el periodo tiene dos cifras, multiplicamos por 100: $100x = 18{,}1818\ldots$. Al restar desaparece la parte periódica: $99x = 18$, así que $x = \frac{18}{99} = \frac{2}{11}$.

b. Hay una cifra no periódica (2) y una periódica (5). Multiplicamos por 100 y por 10 para dejar el periodo justo detrás de la coma: $100x = 125{,}55\ldots$ y $10x = 12{,}55\ldots$. Restando, $90x = 113$ y $x = \frac{113}{90}$.

c. $10x = 23{,}33\ldots$ y $x = 2{,}33\ldots$; restando, $9x = 21$, luego $x = \frac{21}{9} = \frac{7}{3}$. Comprobación: $7 : 3 = 2{,}33\ldots$.

d. $x = 0{,}99\ldots$ y $10x = 9{,}99\ldots$. Restando, $9x = 9$, luego $x = 1$. No es una aproximación: $0{,}\overline{9}$ y 1 son dos escrituras del mismo número.

Solución del ejercicio 3

a. A incluye -3 (corchete) pero no 2 (paréntesis): $-3 \leq x < 2$. B no incluye 0 pero sí 6: $0 < x \leq 6$. En la recta se dibuja punto relleno en los extremos incluidos y hueco en los excluidos.

b. La intersección son los números que están en los dos intervalos: $A \cap B = (0, 2)$. La unión, los que están en alguno de ellos: $A \cup B = [-3, 6]$.

c. Una desigualdad estricta da extremo abierto y una no estricta, extremo cerrado: $(-2, 5]$ y $[3, +\infty)$. En el infinito el intervalo siempre es abierto, porque ∞ no es un número.

d. El complementario de B son los reales que no están en B:

$\mathbb{R} \setminus B = (-\infty, 0] \cup (6, +\infty)$. El 0 entra porque B no lo contenía.

Solución del ejercicio 4

a. $|x - 3| \leq 2$ significa que la distancia de x a 3 es como mucho 2: $-2 \leq x - 3 \leq 2$. Sumando 3, $1 \leq x \leq 5$, es decir, $[1, 5]$.
b. Un valor absoluto mayor que 5 da dos casos: $2x + 1 > 5$, de donde $x > 2$, o $2x + 1 < -5$, de donde $x < -3$. Solución: $(-\infty, -3) \cup (2, +\infty)$.
c. Buscamos los puntos que están a la misma distancia de 0 y de 4: el punto medio, $x = 2$. Algebraicamente, elevando al cuadrado, $x^2 = (x - 4)^2$, que da $0 = -8x + 16$ y $x = 2$.
d. El entorno de centro 2 y radio 0,5 contiene los puntos a menos de 0,5 de 2: $E(2; 0{,}5) = (1{,}5;\ 2{,}5) = \{x : |x - 2| < 0{,}5\}$.

Solución del ejercicio 5

a. Descomponemos: $72 = 2^3 \cdot 3^2 = 2^2 \cdot 3^2 \cdot 2$, así que $\sqrt{72} = 2 \cdot 3\sqrt{2} = 6\sqrt{2}$. Para la raíz cúbica buscamos cubos: $54 = 3^3 \cdot 2$, luego $\sqrt[3]{54} = 3\sqrt[3]{2}$.
b. Simplificamos cada término: $\sqrt{50} = 5\sqrt{2}$, $\sqrt{18} = 3\sqrt{2}$ y $\sqrt{8} = 2\sqrt{2}$. Son radicales semejantes y se suman sus coeficientes: $5\sqrt{2} + 3\sqrt{2} - 2\sqrt{2} = 6\sqrt{2}$.
c. Las raíces del mismo índice se multiplican y se dividen dentro de una sola: $\sqrt{12 \cdot 27} = \sqrt{324} = 18$ y $\sqrt{\frac{90}{10}} = \sqrt{9} = 3$.
d. Para introducir un factor se eleva al índice: $3\sqrt{2} = \sqrt{3^2 \cdot 2} = \sqrt{18}$ y $2\sqrt[3]{5} = \sqrt[3]{2^3 \cdot 5} = \sqrt[3]{40}$.

Solución del ejercicio 6

a. Con una sola raíz cuadrada, multiplicamos arriba y abajo por ella: $\dfrac{6\sqrt{3}}{3} = 2\sqrt{3}$.

   En el segundo, multiplicamos por $\sqrt{5}$: $\dfrac{5\sqrt{5}}{2 \cdot 5} = \dfrac{\sqrt{5}}{2}$.
b. Con una resta, multiplicamos por el conjugado $\sqrt{5} + 1$; en el denominador aparece una suma por diferencia: $\dfrac{4(\sqrt{5} + 1)}{(\sqrt{5})^2 - 1^2} = \dfrac{4(\sqrt{5} + 1)}{4} = \sqrt{5} + 1$.
c. Multiplicamos por $\sqrt{3} - \sqrt{2}$: $\dfrac{\sqrt{3} - \sqrt{2}}{3 - 2} = \sqrt{3} - \sqrt{2} \approx 1{,}732 - 1{,}414 = 0{,}318$.
d. Para que el denominador sea una raíz cúbica exacta multiplicamos por $\sqrt[3]{2}$,

porque $4 \cdot 2 = 8 = 2^3$: $\dfrac{2\sqrt[3]{2}}{\sqrt[3]{8}} = \dfrac{2\sqrt[3]{2}}{2} = \sqrt[3]{2}$.

Solución del ejercicio 7

a. El denominador del exponente es el índice de la raíz y el numerador, la potencia: $8^{2/3} = (\sqrt[3]{8})^2 = 2^2 = 4$. El exponente negativo indica el inverso:
$16^{-3/4} = \dfrac{1}{(\sqrt[4]{16})^3} = \dfrac{1}{2^3} = \dfrac{1}{8}$.

b. Conviene hacer primero la raíz, que es exacta: $(\sqrt[3]{27})^4 = 3^4 = 81$.

c. Pasamos a potencias de la misma base y sumamos exponentes:
$2^{1/2} \cdot 2^{1/3} = 2^{1/2+1/3} = 2^{5/6} = \sqrt[6]{2^5} = \sqrt[6]{32}$.

d. Escribimos $\sqrt[4]{8} = 2^{3/4}$ y $\sqrt{2} = 2^{1/2}$, y restamos exponentes: $2^{3/4-1/2} = 2^{1/4} = \sqrt[4]{2}$.

Solución del ejercicio 8

a. Dividimos lado largo entre lado corto: $\frac{297}{210} \approx 1{,}4143$, mientras que $\sqrt{2} \approx 1{,}4142$. Coinciden con tres decimales; la pequeña diferencia se debe a que las medidas se redondean al milímetro.

b. El área de A0 es lado corto por lado largo: $x \cdot x\sqrt{2} = 1$, así que $x^2 = \frac{1}{\sqrt{2}} = 2^{-1/2}$. Tomando la raíz positiva, $x = 2^{-1/4}$ m.

c. $x = 2^{-1/4} \approx 0{,}8409$ m y el lado largo, $x\sqrt{2} = 2^{-1/4} \cdot 2^{1/2} = 2^{1/4} \approx 1{,}1892$ m.

d. Al doblar por la mitad del lado largo, la nueva hoja tiene lados $\frac{x\sqrt{2}}{2}$ y x. Su cociente es $\dfrac{x}{x\sqrt{2}/2} = \dfrac{2}{\sqrt{2}} = \sqrt{2}$: la misma proporción que la hoja original.

Solución del ejercicio 9

a. Tiempo = distancia entre velocidad: $t = \dfrac{1{,}496 \cdot 10^8}{3 \cdot 10^5} \approx 0{,}4987 \cdot 10^3 = 4{,}987 \cdot 10^2$ s, unos 499 s. Dividiendo entre 60, unos 8,3 minutos.

b. Multiplicamos los años luz por la distancia de un año luz:
$4{,}24 \cdot 9{,}46 \cdot 10^{12} \approx 40{,}11 \cdot 10^{12} = 4{,}011 \cdot 10^{13}$ km.

c. Horas de viaje: $\dfrac{4{,}011 \cdot 10^{13}}{900} \approx 4{,}457 \cdot 10^{10}$ h. Dividiendo entre 8 760 h por año:
$\approx 5{,}09 \cdot 10^6$ años, más de cinco millones de años.

d. En notación científica son significativas todas las cifras de la mantisa: 1, 4, 9 y 6, es decir, cuatro cifras significativas.

Solución del ejercicio 10

a. Pasamos 1 cm a metros, 10^{-2} m, y dividimos entre la longitud de una bacteria: $\dfrac{10^{-2}}{2 \cdot 10^{-6}} = 0{,}5 \cdot 10^{4} = 5\,000$ bacterias.
b. Como 1 L equivale a 10^{6} mm³, 5 L son $5 \cdot 10^{6}$ mm³.
c. Multiplicamos el volumen por los glóbulos que hay en cada mm³: $5 \cdot 10^{6} \cdot 5 \cdot 10^{6} = 25 \cdot 10^{12} = 2{,}5 \cdot 10^{13}$ glóbulos rojos. Al pasar a notación científica, la mantisa debe estar entre 1 y 10.
d. Longitud total: $2{,}5 \cdot 10^{13} \cdot 7{,}5 \cdot 10^{-6} = 18{,}75 \cdot 10^{7}$ m $= 1{,}875 \cdot 10^{8}$ m. Dividiendo entre 1 000, $1{,}875 \cdot 10^{5}$ km: casi la mitad de la distancia a la Luna.

Solución del ejercicio 11

a. $E_a = |2{,}348 - 2{,}35| = 0{,}002$ m (2 mm). $E_a = |11{,}95 - 11{,}9| = 0{,}05$ cm (0,5 mm).
b. $E_r = \frac{0{,}002}{2{,}348} \approx 0{,}085\,\%$. $E_r = \frac{0{,}05}{11{,}95} \approx 0{,}418\,\%$.
c. La primera: aunque su error absoluto es mayor, su error relativo es casi cinco veces menor. La calidad se mide con el error relativo.
d. $|x - 1{,}80| \leq 0{,}001$: $x \in [1{,}799;\ 1{,}801]$ m.

Solución del ejercicio 12

a. $-0{,}2 \leq x - 50 \leq 0{,}2 \Rightarrow x \in [49{,}8;\ 50{,}2]$.
b. Se aceptan B (49,9), C (50,15) y E (50,2, justo en el extremo, que está incluido). Se rechazan A (49,75) y D (50,25).
c. Ninguno. El más cercano es B, pero $|49{,}9 - 50| = 0{,}1$ no es estrictamente menor que 0,1: queda justo en el borde, que está excluido. Los demás se alejan 0,15 mm o más. La máquina debe ajustarse.
d. $|x - 50| > 0{,}2$, es decir, $(-\infty;\ 49{,}8) \cup (50{,}2;\ +\infty)$.

Solución del ejercicio 13

a. La temperatura puede alejarse de 4 °C como mucho 1,5 °C: $|T - 4| \leq 1{,}5$, que equivale a $-1{,}5 \leq T - 4 \leq 1{,}5$, es decir, $T \in [2{,}5;\ 5{,}5]$.
b. Comparamos cada valor con el intervalo: el martes (5,8 °C) supera 5,5 y el jueves (2,2 °C) está por debajo de 2,5. Esos dos días la temperatura estuvo fuera del rango recomendado.
c. Media: $\frac{4{,}1+5{,}8+3{,}6+2{,}2+4{,}8}{5} = \frac{20{,}5}{5} = 4{,}1$ °C. Su distancia a 4 °C es $|4{,}1 - 4| = 0{,}1$ °C: la media es buena aunque haya días fuera del rango, porque los excesos se compensan.
d. $|T - 4| \leq 0{,}8$ equivale a $3{,}2 \leq T \leq 4{,}8$, es decir, $[3{,}2;\ 4{,}8]$.

Solución del ejercicio 14

a. El error absoluto es la diferencia, en valor absoluto, con el valor exacto. $|3{,}14159 - 3{,}14| \approx 0{,}00159$. $\frac{22}{7} = 3{,}142857\ldots$, con error $\approx 0{,}00126$. $\frac{355}{113} = 3{,}1415929\ldots$, con error $\approx 2{,}7 \cdot 10^{-7}$.
b. El error relativo es el absoluto dividido entre el valor exacto. 3,14: $\frac{0{,}00159}{3{,}14159} \approx 0{,}051\,\%$. $\frac{22}{7}$: $\frac{0{,}00126}{3{,}14159} \approx 0{,}040\,\%$.
c. De mejor a peor, según su error: $\frac{355}{113}$, $\frac{22}{7}$ y $3{,}14$. La aproximación china acierta seis decimales.
d. La longitud es $L = 2\pi r = 100\pi$. Al usar 3,14 el error se multiplica por 100: $100 \cdot 0{,}00159 \approx 0{,}16$ m, unos 16 cm.

Solución del ejercicio 15

a. $\varphi = \frac{1+2{,}2361}{2} \approx 1{,}6180$. Como $\sqrt{5}$ es irracional, también lo son $1+\sqrt{5}$ y su mitad.
b. $\varphi^2 = \frac{1+2\sqrt{5}+5}{4} = \frac{6+2\sqrt{5}}{4} = \frac{3+\sqrt{5}}{2}$, y $\varphi + 1 = \frac{1+\sqrt{5}+2}{2} = \frac{3+\sqrt{5}}{2}$. Son iguales.
c. $\frac{2}{1+\sqrt{5}} = \frac{2(\sqrt{5}-1)}{5-1} = \frac{\sqrt{5}-1}{2} = \frac{1+\sqrt{5}}{2} - 1 = \varphi - 1$.
d. $\frac{85{,}6}{53{,}98} \approx 1{,}5858$. Error relativo: $\frac{1{,}6180-1{,}5858}{1{,}6180} \approx 1{,}99\,\%$. Es casi áurea, pero no exactamente.
e. No: su proporción es $\sqrt{2} \approx 1{,}414$, bastante lejos de $1{,}618$. Los formatos DIN se eligen para conservar la forma al doblar, no por estética.

Solución del ejercicio 16

a. $d = \sqrt{105^2 + 68^2} = \sqrt{11\,025 + 4\,624} = \sqrt{15\,649}$. $15\,649$ no tiene factores cuadrados (no es divisible entre 4, 9, 25, 49, 121…), así que no se simplifica.
b. $d \approx 125{,}10$ m.
c. $E_a \approx |125{,}096 - 125| = 0{,}096$ m; $E_r \approx \frac{0{,}096}{125{,}096} \approx 0{,}077\,\%$.
d. $20 \cdot 0{,}096 \approx 1{,}92$ m, menos de dos metros en 2,5 km.
e. No: el campo se marca con líneas de 12 cm de anchura; una precisión de milésimas de milímetro no tiene sentido práctico.

Solución del ejercicio 17

a. El ancho, el alto y la diagonal forman un triángulo rectángulo. Por Pitágoras, $(16k)^2 + (10k)^2 = 10^2$, es decir, $256k^2 + 100k^2 = 100$, o $356k^2 = 100$.
b. $k^2 = \frac{100}{356}$, luego $k = \dfrac{10}{\sqrt{356}}$. Como $356 = 4 \cdot 89$, $\sqrt{356} = 2\sqrt{89}$ y $k = \dfrac{5}{\sqrt{89}}$.

Racionalizando, $k = \dfrac{5\sqrt{89}}{89}$.

c. Ancho $= 16k = \frac{80}{\sqrt{89}} \approx 8{,}480$ pulgadas; alto $= 10k = \frac{50}{\sqrt{89}} \approx 5{,}300$ pulgadas.
d. Multiplicamos por 2,54: ancho $\approx 21{,}54$ cm y alto $\approx 13{,}46$ cm. Son las medidas que necesita Marcos.
e. Área exacta: $\frac{80}{\sqrt{89}} \cdot \frac{50}{\sqrt{89}} = \frac{4\,000}{89} \approx 44{,}94$ pulgadas cuadradas.

Solución del ejercicio 18

a. $u + v = (3 - 1,\ 4 + 2) = (2, 6)$.
b. $3u = (9, 12)$. $u - 2v = (3 + 2,\ 4 - 4) = (5, 0)$.
c. $\sqrt{3^2 + 4^2} = 5$ m.
d. $a + 3b = 7$ y $2a - b = 0$. De la segunda, $b = 2a$; sustituyendo, $7a = 7$, $a = 1$ y $b = 2$.
e. Debe hacer una vez el movimiento $(1, 2)$ y dos veces el $(3, -1)$ para llegar a $(7, 0)$.

Solución del ejercicio 19

a. $|x - 45|$.
b. $|x - 100|$.
c. Unión: $(15, 75) \cup (80, 120)$. Sin cobertura: $[0, 15]$, $[75, 80]$ y $[120, 150]$.
d. Para cubrir desde 120 hasta 150, la distancia al punto más lejano es $\max(135 - 120,\ 150 - 135) = 15$ km; en sentido estricto necesita un radio algo mayor que 15 km.
e. Quedan sin cobertura $[0, 15]$ y $[75, 80]$ (más los puntos frontera): $15 + 5 = 20$ km.

Solución del ejercicio 20

a. Con común denominador $(2 - \sqrt{3})(2 + \sqrt{3}) = 4 - 3 = 1$: la suma es $(2 + \sqrt{3}) + (2 - \sqrt{3}) = 4$.
b. $(2 + \sqrt{3})^2 = 4 + 4\sqrt{3} + 3 = 7 + 4\sqrt{3}$. Como $2 + \sqrt{3} > 0$, $\sqrt{7 + 4\sqrt{3}} = 2 + \sqrt{3}$.
c. Análogamente, $\sqrt{7 - 4\sqrt{3}} = 2 - \sqrt{3}$ (positivo). La resta es $(2 + \sqrt{3}) - (2 - \sqrt{3}) = 2\sqrt{3}$.
d. Si $\sqrt{2} = \frac{p}{q}$, entonces $p^2 = 2q^2$, así que p^2 es par y p también: $p = 2m$. Entonces $4m^2 = 2q^2$, $q^2 = 2m^2$ y q también es par. Contradicción con que la fracción sea irreducible.