Soluciones del examen - Números complejos

Curso: 1 Bachillerato Ciencias · Duración: 55 minutos · /20

Solución del ejercicio 1 (4 puntos)

a. Sumamos y restamos partes reales e imaginarias por separado:
$z_1 + z_2 = (2+1) + (-3+4)i = 3 + i$ y $z_1 - z_2 = (2-1) + (-3-4)i = 1 - 7i$.
Para el producto, multiplicamos como polinomios:
$z_1 z_2 = 2 + 8i - 3i - 12i^2 = 2 + 5i + 12 = 14 + 5i$. Se usa que $i^2 = -1$.

b. Multiplicamos numerador y denominador por el conjugado del denominador, $1+i$:
$\dfrac{(5+i)(1+i)}{(1-i)(1+i)} = \dfrac{5 + 5i + i + i^2}{1+1} = \dfrac{4+6i}{2} = 2 + 3i$. Comprobación:
$(2+3i)(1-i) = 2 - 2i + 3i - 3i^2 = 5 + i$.

c. Las potencias de i se repiten cada 4. Como $42 = 4 \cdot 10 + 2$, $i^{42} = i^2 = -1$. Los restos 0, 1, 2 y 3 corresponden a 1, i, -1 y $-i$.

Solución del ejercicio 2 (3 puntos)

a. Aplicamos la fórmula general. El discriminante es $36 - 52 = -16$, negativo, así que las soluciones son complejas conjugadas: $x = \dfrac{6 \pm \sqrt{-16}}{2} = \dfrac{6 \pm 4i}{2} = 3 \pm 2i$.
Comprobación con $3 + 2i$: $(3+2i)^2 - 6(3+2i) + 13 = 5 + 12i - 18 - 12i + 13 = 0$
.

b. Suma: $(3+2i) + (3-2i) = 6$, que coincide con $-\frac{b}{a} = 6$. Producto: es una suma por diferencia, $(3+2i)(3-2i) = 9 - 4i^2 = 9 + 4 = 13$, que coincide con $\frac{c}{a} = 13$. Las relaciones entre coeficientes y raíces se cumplen también con soluciones complejas. Las soluciones complejas de una ecuación con coeficientes reales aparecen siempre en pares conjugados.

Solución del ejercicio 3 (4 puntos)

a. Módulo: $|z| = \sqrt{(-2\sqrt{3})^2 + 2^2} = \sqrt{12 + 4} = 4$. El punto tiene parte real negativa e imaginaria positiva, así que está en el segundo cuadrante, y $\operatorname{tg}\alpha = \frac{2}{-2\sqrt{3}} = -\frac{1}{\sqrt{3}}$: $\alpha = 180^\circ - 30^\circ = 150^\circ$. Por tanto, $z = 4_{150^\circ}$. Comprobación:
$4(\cos 150^\circ + i \operatorname{sen} 150^\circ) = -2\sqrt{3} + 2i$.

b. Multiplicamos módulos y sumamos argumentos: $4_{150^\circ} \cdot 3_{30^\circ} = 12_{180^\circ}$, que en binómica es -12. El resultado es un número real negativo porque el argumento es 180°.

c. Por De Moivre: $(4_{150^\circ})^3 = 64_{450^\circ} = 64_{90^\circ}$, ya que $450^\circ - 360^\circ = 90^\circ$. En binómica, $64i$. Se eleva el módulo al cubo y se triplica el argumento.

Solución del ejercicio 4 (4 puntos)

a. $-27i$ está sobre el semieje imaginario negativo: módulo 27 y argumento 270°, es decir, $-27i = 27_{270^\circ}$.
b. El módulo de las raíces es $\sqrt[3]{27} = 3$ y los argumentos son $\frac{270^\circ + 360^\circ k}{3}$ con $k = 0, 1, 2$: 90°, 210° y 330°. Las raíces son 3_{90°, 3_{210° y 3_{330°.
c. $3_{90^\circ} = 3i$; $3_{210^\circ} = -\frac{3\sqrt{3}}{2} - \frac{3}{2}i$; $3_{330^\circ} = \frac{3\sqrt{3}}{2} - \frac{3}{2}i$. Están a la misma distancia del origen y separadas 120°: forman un triángulo equilátero inscrito en la circunferencia de radio 3.

Solución del ejercicio 5 (5 puntos)

a. $|D| = \sqrt{3^2 + 1^2} = \sqrt{10} \approx 3{,}16$. El módulo es la distancia al origen: el dron está a unos 31,6 m del escenario.
b. Girar 45° es multiplicar por $1_{45^\circ} = \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}i$:
$(3 + i) \cdot \frac{\sqrt{2}}{2}(1 + i) = \frac{\sqrt{2}}{2}(3 + 3i + i + i^2) = \frac{\sqrt{2}}{2}(2 + 4i) = \sqrt{2} + 2\sqrt{2}\,i \approx 1{,}41 + 2{,}83i$
. El módulo sigue siendo $\sqrt{10}$, porque un giro no cambia la distancia.
c. Sumamos el desplazamiento: $(\sqrt{2} - 1) + (2\sqrt{2} + 2)i \approx 0{,}414 + 4{,}828i$. Distancia al escenario: $\sqrt{0{,}414^2 + 4{,}828^2} \approx 4{,}85$ unidades, es decir, unos 48,5 m. Con los valores exactos, el cuadrado del módulo es
$(\sqrt{2} - 1)^2 + (2\sqrt{2} + 2)^2 = (3 - 2\sqrt{2}) + (12 + 8\sqrt{2}) = 15 + 6\sqrt{2} \approx 23{,}49$, cuya raíz es aproximadamente 4,85.