Apuntes - Números complejos

Curso: 1 Bachillerato Ciencias

En este tema aprenderás: la unidad imaginaria y la forma binómica, operaciones, representación y forma polar y operaciones en forma polar. Cada idea va en un cuadro de color, con ejemplos resueltos paso a paso.

Actividad de introducción: una raíz que no debería existir

Desde 4.º de ESO sabes que la ecuación $x^2+1=0$ «no tiene solución», porque ningún número real elevado al cuadrado da -1. Pero en el siglo XVI los algebristas italianos, al resolver ecuaciones de tercer grado, se encontraron con raíces de números negativos en mitad de los cálculos... y al final obtenían soluciones reales correctas. Decidieron entonces aceptar un número nuevo, i, con $i^2=-1$, y operar con él siguiendo las reglas de siempre. Hoy esos números, los **números complejos**, son imprescindibles: con ellos se calculan los circuitos eléctricos de tu casa, se programan los giros de los videojuegos, se procesan las señales de audio de tu móvil y se dibujan fractales. En este tema aprenderás a escribirlos en forma binómica y en forma polar, a operar con ellos, a representarlos en el plano y a calcular sus raíces.

La unidad imaginaria y la forma binómica

Definición: unidad imaginaria

La ecuación $x^2+1=0$ no tiene solución real. Se define la **unidad imaginaria** i con $i^2=-1$, de modo que $\sqrt{-16}=4i$. Un **número complejo** en **forma binómica** es $z=a+bi$, con a la **parte real** y b la **parte imaginaria**. El conjunto de todos ellos es $\mathbb{C}$, y $\mathbb{R}\subset\mathbb{C}$. Las potencias de i se repiten con periodo 4: $i^0=1$, $i^1=i$, $i^2=-1$, $i^3=-i$, $i^4=1$. Por eso $i^{23}=i^3=-i$ (23 dividido entre 4 da resto 3).

Con ello, toda ecuación de segundo grado tiene solución en $\mathbb{C}$: $x^2-2x+5=0$ da $x=\frac{2\pm\sqrt{-16}}{2}=1\pm 2i$.

Operaciones

Propiedad: operaciones

- **Suma y resta:** $(a+bi)\pm(c+di)=(a\pm c)+(b\pm d)i$.
- **Producto:** se aplica la propiedad distributiva con $i^2=-1$: $(2+3i)(1-4i)=2-8i+3i-12i^2=14-5i$.
- **Conjugado** de $z=a+bi$: $\bar{z}=a-bi$. Se cumple $z\bar{z}=a^2+b^2$ (real).
- **Cociente:** se multiplica numerador y denominador por el conjugado del denominador: $\frac{5+i}{2-i}=\frac{(5+i)(2+i)}{(2-i)(2+i)}=\frac{9+7i}{5}$.

Cómo se hace: dividir números complejos en forma binómica

1. Multiplica numerador y denominador por el conjugado del denominador.
2. Desarrolla el denominador: $(c+di)(c-di) = c^2 + d^2$.
3. Desarrolla el numerador usando $i^2 = -1$ y separa parte real e imaginaria.

Ejemplo 1: producto y cociente

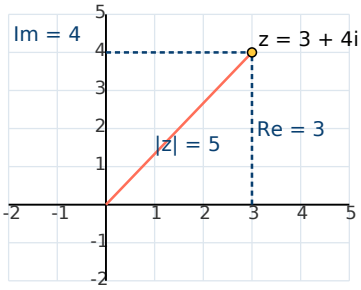
Calcula $(2+3i)(1-i)$ y $\frac{1+i}{1-i}$.

$(2+3i)(1-i) = 2 - 2i + 3i - 3i^2 = 5 + i$. Y $\frac{1+i}{1-i} = \frac{(1+i)^2}{(1-i)(1+i)} = \frac{2i}{2} = i$.

Representación y forma polar

Propiedad

Cada $z = a + bi$ se representa por el punto (a, b) del **plano de Argand** (su *afijo*), con eje real horizontal y eje imaginario vertical. El **módulo** es $|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$ (distancia al origen) y el **argumento** θ es el ángulo con el semieje real positivo, con $\tan\theta = \frac{b}{a}$ (cuidado con el cuadrante).



Definición: forma polar

La **forma polar** es $z = r_\theta$, y la **trigonométrica** $z = r(\cos\theta + i\,\mathrm{sen}\,\theta)$. Para $z = -1 + \sqrt{3}i$: $r = \sqrt{1+3} = 2$; el punto está en el 2.º cuadrante y $\tan\theta = -\sqrt{3}$, así que $\theta = 120^\circ$. Luego $z = 2_{120^\circ}$. Al revés, $4_{60^\circ} = 4\left(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i\right) = 2 + 2\sqrt{3}\,i$.

Operaciones en forma polar

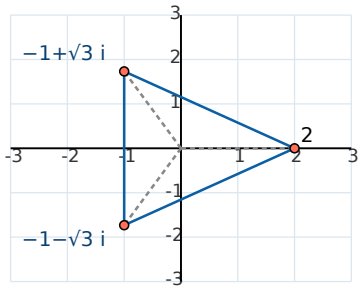
Propiedad: operaciones en forma polar

- **Producto:** $r_\alpha \cdot s_\beta = (rs)_{\alpha+\beta}$. Ejemplo: $3_{40^\circ} \cdot 2_{50^\circ} = 6_{90^\circ} = 6i$.
- **Cociente:** $\frac{r_\alpha}{s_\beta} = \left(\frac{r}{s}\right)_{\alpha-\beta}$.

- **Potencia (Moivre):** $(r_\alpha)^n = (r^n)_{n\alpha}$. Ejemplo: $(1+i)^8 = (\sqrt{2}_{45^\circ})^8 = 16_{360^\circ} = 16$.
- **Raíces n-ésimas:** las n raíces de r_α son $\sqrt[n]{r}_{\frac{\alpha+360^\circ k}{n}}$, con $k = 0, 1, \ldots, n-1$; forman un polígono regular de n lados.

Ejemplo 2

Las raíces cúbicas de 8 ($8 = 8_{0^\circ}$) son $2_{0^\circ} = 2$, $2_{120^\circ} = -1 + \sqrt{3}i$ y $2_{240^\circ} = -1 - \sqrt{3}i$: los vértices de un triángulo equilátero.



Observación

Multiplicar por $i = 1_{90^\circ}$ gira un punto 90° alrededor del origen: $(2+i)\cdot i = -1 + 2i$. La distancia entre los afijos de z y w es $|z - w|$.

Ejemplo 3: potencia en forma polar

Calcula $(1+i)^4$ con la forma polar.

$1 + i = \sqrt{2}_{45^\circ}$. Entonces $(1+i)^4 = (\sqrt{2})^4_{4\cdot 45^\circ} = 4_{180^\circ} = -4$.

¡Atención! Errores frecuentes

- Escribir $i^2 = 1$ o $\sqrt{-a}\cdot\sqrt{-b} = \sqrt{ab}$ (falso con raíces negativas).
- Dar el argumento sin mirar el cuadrante: $\tan\theta = \frac{b}{a}$ tiene dos ángulos posibles.
- No multiplicar por el conjugado al dividir.
- Olvidar las n raíces de un número complejo (solo se da la principal).

Potencias de la unidad imaginaria

Propiedad: las potencias de i se repiten cada cuatro

Como $i^1 = i$, $i^2 = -1$, $i^3 = -i$ e $i^4 = 1$, a partir de ahí los valores vuelven a empezar. Para calcular i^n se divide n entre 4 y se usa el resto: $i^n = i^{\text{resto}}$. Por ejemplo, $i^{35} = i^3 = -i$, porque $35 = 4\cdot 8 + 3$. Este ciclo tiene una interpretación geométrica: multiplicar por i es girar 90°, y cuatro giros de 90° dan una vuelta completa.

Ecuaciones con soluciones complejas

Teorema fundamental del álgebra

Toda ecuación polinómica de grado n con coeficientes complejos tiene exactamente n soluciones complejas, contando su multiplicidad. Si los coeficientes son reales, las soluciones no reales aparecen siempre en parejas de complejos conjugados $a \pm bi$. En particular, una ecuación de segundo grado $ax^2 + bx + c = 0$ con discriminante $\Delta = b^2 - 4ac$ tiene las soluciones $x = \frac{-b \pm i\sqrt{-\Delta}}{2a}$.

Ejemplo 4

Resuelve $x^3 - 3x^2 + 4x - 2 = 0$.

Probamos divisores del término independiente: $x = 1$ da $1 - 3 + 4 - 2 = 0$. Por Ruffini, $x^3 - 3x^2 + 4x - 2 = (x - 1)(x^2 - 2x + 2)$. La ecuación $x^2 - 2x + 2 = 0$ tiene $\Delta = 4 - 8 = -4$, así que $x = \frac{2 \pm 2i}{2} = 1 \pm i$. Las tres soluciones son 1, $1 + i$ y $1 - i$: una real y dos complejas conjugadas, como predice el teorema.

El módulo como distancia

Propiedad: distancia entre dos complejos

Cada complejo $z = a + bi$ se representa en el plano por el punto (a, b), llamado su **afijo**. El módulo $|z|$ es la distancia del afijo al origen, y la distancia entre los afijos de z y w es $|z - w|$. Así, los complejos que cumplen $|z - (2 + i)| = 3$ son los puntos de la circunferencia de centro $(2, 1)$ y radio 3, y los que cumplen $|z|$ forman el interior del círculo unidad. Además, se cumplen $|z \cdot w| = |z| \cdot |w|$ y $|z + w| \leq |z| + |w|$ (desigualdad triangular).

Ejemplo 5

Calcula la distancia entre los afijos de $z = 5 + 2i$ y $w = 1 - i$.

$z - w = (5 - 1) + (2 + 1)i = 4 + 3i$, de modo que la distancia es $|4 + 3i| = \sqrt{16 + 9} = 5$ unidades. Es la misma distancia que se obtendría con la fórmula de la geometría analítica entre los puntos $(5, 2)$ y $(1, -1)$.

Forma trigonométrica y cambio de forma

Definición: forma trigonométrica

Si $z = r_\alpha$, entonces $a = r\cos\alpha$ y $b = r\,\mathrm{sen}\,\alpha$, de modo que $z = r(\cos\alpha + i\,\mathrm{sen}\,\alpha)$. Esta expresión se llama **forma trigonométrica** y sirve de puente entre la forma binómica, cómoda para sumar y restar, y la forma polar, cómoda para multiplicar, dividir, elevar

a potencias y extraer raíces. El argumento se suele dar en el intervalo $[0°, 360°)$; se llama argumento principal.

Cómo se hace: pasar de forma binómica a forma polar

1. Calcula el módulo $r = \sqrt{a^2 + b^2}$.
2. Dibuja el punto (a, b) para saber en qué cuadrante está.
3. Calcula el ángulo agudo .
4. Ajusta según el cuadrante: primero $\alpha = \theta$; segundo $\alpha = 180° - \theta$; tercero $\alpha = 180° + \theta$; cuarto $\alpha = 360° - \theta$.
5. Si $a = 0$, el argumento es $90°$ o $270°$ según el signo de b.

Ejemplo 6

Escribe $z = -3 - \sqrt{3}\,i$ en forma polar y comprueba el resultado.

Módulo: $r = \sqrt{9 + 3} = \sqrt{12} = 2\sqrt{3}$. El punto $(-3, -\sqrt{3})$ está en el tercer cuadrante. Ángulo agudo: $\theta = \arctan \frac{\sqrt{3}}{3} = 30°$. Argumento: $180° + 30° = 210°$. Por tanto, $z = 2\sqrt{3}_{210°}$. Comprobación: $2\sqrt{3}\cos 210° = 2\sqrt{3} \cdot \left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = -3$ y $2\sqrt{3}\,\mathrm{sen}\, 210° = 2\sqrt{3} \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) = -\sqrt{3}$.

¡Atención! el argumento que da la calculadora

La tecla $\tan^{-1}$ de la calculadora solo devuelve ángulos entre $-90°$ y $90°$. Para $z = -1 + i$ daría $\arctan(-1) = -45°$, que corresponde al cuarto cuadrante, cuando el punto $(-1, 1)$ está en el segundo: el argumento correcto es $135°$. Dibuja siempre el punto antes de dar el argumento. Tampoco confundas el conjugado con el opuesto: el conjugado de $2 + 3i$ es $2 - 3i$, y su opuesto es $-2 - 3i$. Y recuerda que $\sqrt{-4} \cdot \sqrt{-9}$ no es $\sqrt{36} = 6$, sino $2i \cdot 3i = -6$.

Radicación de números complejos

Regla: raíces n-ésimas

Un complejo no nulo r_α tiene exactamente n raíces n-ésimas, todas con módulo $\sqrt[n]{r}$ y argumentos $\beta_k = \frac{\alpha + 360° k}{n}$, con $k = 0, 1, \ldots, n-1$. Las raíces se reparten de forma regular sobre una circunferencia de radio $\sqrt[n]{r}$ centrada en el origen: son los vértices de un polígono regular de n lados.

Cómo se hace: calcular las raíces de un complejo

1. Escribe el número en forma polar r_α.

2. Calcula el módulo de las raíces, $\sqrt[n]{r}$ (un número real positivo).
3. Calcula el primer argumento, $\frac{\alpha}{n}$, y suma $\frac{360^\circ}{n}$ sucesivamente hasta tener n argumentos.
4. Si se pide, pasa cada raíz a forma binómica con $a = r\cos\beta$ y $b = r\,\mathrm{sen}\,\beta$.

Ejemplo 7

Calcula las raíces sextas de 1 y represéntalas.

$1 = 1_{0^\circ}$. Las raíces tienen módulo 1 y argumentos $0^\circ, 60^\circ, 120^\circ, 180^\circ, 240^\circ$ y 300°: 1, $\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$, $-\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$, -1, $-\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i$ y $\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i$. Son los vértices de un hexágono regular inscrito en la circunferencia unidad.

Interpretación geométrica de las operaciones

Propiedad: sumar es trasladar y multiplicar es girar

Si representamos los complejos como vectores del plano, la suma $z + w$ se obtiene con la regla del paralelogramo: es una traslación. Multiplicar por r_α estira el vector multiplicando su longitud por r y lo gira un ángulo α. En particular, multiplicar por $i = 1_{90^\circ}$ gira 90° en sentido antihorario, y tomar el conjugado es reflejar respecto del eje real. Por eso los complejos son la herramienta natural para describir giros en la informática gráfica y en la robótica.

Ejemplo 8

Un punto $P = 2 + 3i$ gira 90° alrededor del punto $C = 1 + i$. ¿Dónde queda?

Trasladamos para que C sea el origen: $P - C = 1 + 2i$. Giramos multiplicando por i: $(1 + 2i)i = -2 + i$. Deshacemos la traslación sumando C: $-2 + i + 1 + i = -1 + 2i$. El punto queda en $-1 + 2i$, y se comprueba que $|P - C| = |(-1 + 2i) - C| = \sqrt{5}$.

¿Sabías que? De números imposibles a números imprescindibles

Descartes llamó «imaginarios» a estos números en 1637, con cierto desprecio, y el nombre se quedó. Fue Rafael Bombelli quien en 1572 escribió las primeras reglas para operar con ellos, Euler introdujo el símbolo i en 1777 y Gauss los representó como puntos del plano a principios del siglo XIX. Hoy cualquier ingeniero de telecomunicaciones trabaja a diario con ellos: cada vez que escuchas música comprimida en el móvil o ves una película en streaming, un algoritmo basado en números complejos, la transformada de Fourier, ha descompuesto la señal en ondas.

El consejo de Otto

Suma y resta, en binómica; multiplica, divide, eleva y haz raíces, en polar.