Ejercicios - Números complejos

Curso: 1 Bachillerato Ciencias · 20

Se debe mostrar el desarrollo de cada ejercicio.

Ejercicio 1

Ejercicio 1 – La unidad imaginaria

La unidad imaginaria es el número i que cumple $i^2 = -1$. Gracias a ella, las ecuaciones de segundo grado con discriminante negativo tienen solución.

a. Calcula i^2, i^3, i^4 y i^5. ¿Qué observas?
b. Calcula i^{27}, i^{100} e i^{-1}.
c. Resuelve $x^2 + 9 = 0$.
d. Resuelve $x^2 - 4x + 13 = 0$.

Ejercicio 2

Ejercicio 2 – La forma binómica

Un número complejo se escribe $z = a + bi$, con a (parte real) y b (parte imaginaria) números reales.

a. Para $z = 3 - 5i$, indica la parte real, la parte imaginaria, el opuesto y el conjugado.
b. Dado $z = (a - 2) + (a + 3)i$, halla a para que z sea un número real.
c. Con el mismo z, halla a para que sea imaginario puro.
d. Halla x e y reales para que $(x + 2) + (2y - 1)i = 5 + 7i$.

Ejercicio 3

Ejercicio 3 – Operaciones en forma binómica

Sean $z_1 = 3 + 4i$ y $z_2 = 1 - 2i$. Opera como con polinomios, recordando que $i^2 = -1$.

a. Calcula $z_1 + z_2$ y $z_1 - z_2$.
b. Calcula $z_1 \cdot z_2$.
c. Calcula $z_1 \cdot \bar{z}_1$. ¿Qué tipo de número se obtiene?
d. Calcula $(2 + i)^3$.

Ejercicio 4

Ejercicio 4 – Dividir números complejos

Para dividir, se multiplican numerador y denominador por el conjugado del denominador.

a. $\dfrac{3+4i}{1-2i}$
b. $\dfrac{5}{2-i}$
c. $\dfrac{1+i}{1-i}$
d. Calcula el inverso de $z = 4 - 3i$.

Ejercicio 5

Ejercicio 5 – Ecuaciones con soluciones complejas

Cuando el discriminante es negativo, la ecuación $ax^2 + bx + c = 0$ (con coeficientes reales) tiene dos soluciones complejas conjugadas.

a. Resuelve $x^2 + 2x + 5 = 0$.
b. Comprueba que la suma de las soluciones es $-\frac{b}{a}$ y el producto $\frac{c}{a}$.
c. Escribe una ecuación de segundo grado cuyas soluciones sean $3 + i$ y $3 - i$.
d. Resuelve $x^4 - 16 = 0$ en el conjunto de los complejos.

Ejercicio 6

Ejercicio 6 – De binómica a polar y al revés

Un complejo $z = a + bi$ también se expresa por su módulo $r = \sqrt{a^2 + b^2}$ y su argumento α, con $\tan\alpha = \frac{b}{a}$, y se escribe r_α.

a. Escribe en forma polar $z_1 = 1 + \sqrt{3}\,i$ y $z_2 = -1 + i$.
b. Escribe en forma polar $z_3 = -2 - 2i$ y $z_4 = -3i$.
c. Escribe en forma binómica 4_{30° y 5_{180°.
d. Representa los cuatro primeros números en el plano complejo e indica el cuadrante de cada uno.

Ejercicio 7

Ejercicio 7 – Giros en un videojuego

En un videojuego de plataformas, la posición de un personaje en la pantalla se guarda como un número complejo, con el centro de la pantalla en el origen. El programador sabe que multiplicar por 1_α gira el punto un ángulo α alrededor del origen.

a. El personaje está en $z = 4 + 2i$. Calcula su posición tras girar 90°, multiplicando por i.
b. Calcula su posición tras girar 180°. ¿Qué operación es?
c. Calcula su posición tras girar 60°, con dos decimales.
d. Comprueba que el módulo no cambia en ninguno de los giros. ¿Por qué ocurre?

Ejercicio 8

Ejercicio 8 – Producto, cociente y potencia en forma polar

En forma polar: $r_\alpha \cdot s_\beta = (rs)_{\alpha+\beta}$, $\dfrac{r_\alpha}{s_\beta} = \left(\dfrac{r}{s}\right)_{\alpha-\beta}$ y $(r_\alpha)^n = (r^n)_{n\alpha}$.

a. Calcula $3_{40^\circ} \cdot 2_{50^\circ}$ y exprésalo en forma binómica.
b. Calcula $\dfrac{6_{150^\circ}}{3_{60^\circ}}$.
c. Calcula $(2_{30^\circ})^4$ en forma polar y binómica.
d. ¿Qué es más rápido para calcular $(1+i)^8$: la forma binómica o la polar? Hazlo de las dos maneras.

Ejercicio 9

Ejercicio 9 – Impedancias en un circuito

En los circuitos de corriente alterna, los ingenieros representan la resistencia de cada componente con un número complejo llamado impedancia, en ohmios (Ω). Un técnico de una empresa eléctrica de Tarragona trabaja con $Z_1 = 3 + 4i$ y $Z_2 = 6 - 8i$.

a. Calcula el módulo de cada impedancia.
b. En serie, la impedancia total es $Z_1 + Z_2$. Calcúlala y halla su módulo.
c. En paralelo, $Z = \dfrac{Z_1 Z_2}{Z_1 + Z_2}$. Calcula $Z_1 Z_2$.
d. Calcula la impedancia en paralelo en forma binómica y su módulo.

Ejercicio 10

Ejercicio 10 – Potencias con la fórmula de De Moivre

La fórmula $(r_\alpha)^n = (r^n)_{n\alpha}$ permite calcular potencias grandes sin desarrollar.

a. Calcula $(1+i)^{10}$.
b. Calcula $(1-i)^6$.
c. Calcula $(\sqrt{3}+i)^6$.
d. ¿Para qué valores naturales de n es $(1+i)^n$ un número real?

Ejercicio 11

Ejercicio 11 – Las palas de un aerogenerador

Una empresa de energía eólica de Navarra diseña el logotipo de su parque a partir de un aerogenerador de tres palas iguales, separadas 120°. Si el centro del rotor es el origen y las puntas de las palas miden 2 unidades, sus posiciones son las raíces cúbicas de 8.

a. Escribe 8 en forma polar y aplica la regla de las raíces: $\sqrt[3]{r_\alpha} = \left(\sqrt[3]{r}\right)_{\frac{\alpha+360°k}{3}}$, con $k = 0, 1, 2$.
b. Escribe las tres raíces en forma binómica.
c. Comprueba que la suma de las tres raíces es 0 e interpreta el resultado.
d. Calcula la distancia entre las puntas de dos palas.

Ejercicio 12

Ejercicio 12 – Cuatro fuentes en un jardín

En un jardín de Córdoba se colocan cuatro fuentes alrededor de una central, situada en el origen. Las fuentes están en las raíces cuartas de -16, y cada unidad equivale a 1 metro.

a. Escribe -16 en forma polar.
b. Calcula las cuatro raíces en forma polar y en forma binómica.
c. Comprueba que forman un cuadrado y calcula su lado.
d. Calcula el área del cuadrado que forman.

Ejercicio 13

Ejercicio 13 – El brazo de un robot

En un taller de robótica del instituto, la pinza de un brazo mecánico está en el punto $z = 5_{30°}$ (en decímetros). El brazo puede girar y estirarse: girar un ángulo α y multiplicar la longitud por k equivale a multiplicar z por k_α.

a. Escribe la posición de la pinza en forma binómica.
b. El brazo gira $45°$ y se estira un 20 %. ¿Por qué complejo hay que multiplicar?
c. Calcula la nueva posición en forma polar y en forma binómica.
d. ¿Qué operación devuelve la pinza a su posición inicial?

Ejercicio 14

Ejercicio 14 – La ruta de un velero

Un velero sale del puerto de Palma. Primero navega 10 millas en la dirección que forma $30°$ con el este y después 8 millas en la dirección de $120°$. Cada tramo se representa con un complejo en forma polar.

a. Escribe los dos tramos en forma binómica.
b. Suma los dos tramos para obtener la posición final.
c. Calcula la distancia al puerto y el ángulo con el que habría que volver en línea recta.
d. ¿Por qué los dos tramos forman un ángulo recto? Compruébalo con los argumentos.

Ejercicio 15

Ejercicio 15 – El conjunto de Mandelbrot

Las imágenes de fractales que se ven en carteles y fondos de pantalla se dibujan con números complejos. Para cada complejo c se construye la sucesión $z_0 = 0$, $z_{n+1} = z_n^2 + c$. Si los módulos de los términos se mantienen acotados, el punto c pertenece al conjunto de Mandelbrot y se pinta de negro; si crecen sin límite, se pinta de color según la rapidez con que se escapan. Un ordenador repite este cálculo para millones de puntos.

n	0	1	2	3	4
z_n (c = i)	0	…	…	…	…
z_n (c = 1)	0	…	…	…	…

a. Calcula z_1, z_2, z_3 y z_4 para $c = i$.
b. ¿Qué observas en la sucesión? ¿Pertenece $c = i$ al conjunto?
c. Calcula los cinco primeros términos para $c = 1$. ¿Pertenece al conjunto?
d. Para $c = -1$, calcula los primeros términos y decide.
e. Explica por qué es imposible hacer este dibujo a mano con precisión.

Ejercicio 16

Ejercicio 16 – Una baldosa hexagonal

Un taller de cerámica de Granada diseña baldosas en forma de hexágono regular para el patio de una casa. En el plano de diseño, el centro de la baldosa es el origen y un vértice está en $z_0 = 2$ (en decímetros). Los demás vértices se obtienen girando 60° cada vez, es decir, multiplicando por 1_{60°. La diseñadora necesita las coordenadas exactas para programar la máquina de corte.

a. Escribe el número 1_{60° en forma binómica.
b. Calcula los seis vértices en forma polar y en forma binómica.
c. Comprueba que el lado del hexágono mide 2 dm y calcula su perímetro.
d. Calcula el área de la baldosa, sabiendo que está formada por seis triángulos equiláteros.
e. ¿Cuántas baldosas hacen falta, como mínimo, para cubrir un patio de 12 m²? Justifica por qué hay que redondear hacia arriba.

Ejercicio 17

Ejercicio 17 – Tres farolas en un parque

En un parque de Zaragoza se quieren colocar tres farolas formando un triángulo equilátero. En el plano, con unidades de 10 m, dos farolas están en $A = 0$ y $B = 4 + 2i$. Para encontrar la tercera, C, se gira el segmento AB un ángulo de 60° alrededor de A.

a. Calcula la distancia entre A y B en metros.
b. Calcula $C = (4 + 2i) \cdot 1_{60^\circ}$ con tres decimales.

c. Comprueba que $|C-B| = |B-A|$.
d. Si se girase -60°, se obtendría otra posición posible. Calcúlala y explica cuál conviene si C debe quedar por encima de la recta AB.

Ejercicio 18

Ejercicio 18 – El problema de Cardano

En 1545 el médico y matemático Gerolamo Cardano publicó este problema: «Divide 10 en dos partes cuyo producto sea 40». Le pareció imposible, pero operó con las soluciones como si existieran y comprobó que funcionaban. Fue la primera vez que alguien trabajó con raíces de números negativos en un libro impreso.

a. Llama x y $10-x$ a las dos partes y plantea la ecuación.
b. Resuélvela y escribe las soluciones como números complejos.
c. Comprueba que las dos partes suman 10 y que su producto es 40.
d. Calcula el valor máximo del producto $x(10-x)$ con x real y explica por qué el problema no tiene solución real.
e. ¿Qué otro problema de la vida real conduce a soluciones complejas? Pon un ejemplo con un rectángulo.

Ejercicio 19

Ejercicio 19 – Ecuaciones con el conjugado

Para resolver ecuaciones en las que aparece $\overline{z}$, se escribe $z = a + bi$ y se igualan partes reales e imaginarias.

a. Resuelve $(2+i)z = 3+4i$.
b. Resuelve $z + 2\overline{z} = 6 - i$.
c. Halla los complejos z tales que $z \cdot \overline{z} = 25$ y $\mathrm{Re}(z) = 3$.
d. Calcula el módulo y el argumento de las soluciones del apartado c).

Ejercicio 20

Ejercicio 20 – Desafío: fórmulas trigonométricas con complejos

Por la fórmula de De Moivre, $(\cos\alpha + i\,\mathrm{sen}\,\alpha)^n = \cos n\alpha + i\,\mathrm{sen}\,n\alpha$. Desarrollando la potencia como un binomio se obtienen fórmulas trigonométricas.

a. Con $n=2$, desarrolla $(\cos\alpha + i\,\mathrm{sen}\,\alpha)^2$ y deduce $\cos 2\alpha$ y $\mathrm{sen}\,2\alpha$.
b. Con $n=3$, deduce que $\cos 3\alpha = 4\cos^3\alpha - 3\cos\alpha$.
c. Deduce también que $\mathrm{sen}\,3\alpha = 3\,\mathrm{sen}\,\alpha - 4\,\mathrm{sen}^3\alpha$.
d. Comprueba las dos fórmulas con $\alpha = 60^\circ$.