Soluciones - Números complejos

Curso: 1 Bachillerato Ciencias

Solución del ejercicio 1

a. Partimos de $i^2 = -1$ y vamos multiplicando por i: $i^3 = i^2 \cdot i = -i$, $i^4 = (i^2)^2 = (-1)^2 = 1$, $i^5 = i^4 \cdot i = i$. Las potencias se repiten cada cuatro: i, -1, $-i$, 1.

b. Basta dividir el exponente entre 4 y quedarse con el resto. $27 = 4 \cdot 6 + 3$, así que $i^{27} = i^3 = -i$. $100 = 4 \cdot 25$, resto 0, luego $i^{100} = 1$. Para el exponente negativo: $i^{-1} = \frac{1}{i} = \frac{i}{i^2} = -i$.

c. $x^2 = -9$, luego $x = \pm\sqrt{-9} = \pm\sqrt{9} \cdot \sqrt{-1} = \pm 3i$. Comprobación: $(3i)^2 = 9i^2 = -9$.

d. Fórmula general: $x = \dfrac{4 \pm \sqrt{16 - 52}}{2} = \dfrac{4 \pm \sqrt{-36}}{2} = \dfrac{4 \pm 6i}{2} = 2 \pm 3i$. Las dos soluciones son complejas conjugadas.

Solución del ejercicio 2

a. $\mathrm{Re}(z) = 3$, $\mathrm{Im}(z) = -5$. Opuesto: $-z = -3 + 5i$. Conjugado: $\bar{z} = 3 + 5i$.

b. Debe ser nula la parte imaginaria: $a + 3 = 0 \Rightarrow a = -3$, y entonces $z = -5$.

c. Debe ser nula la parte real (y no la imaginaria): $a - 2 = 0 \Rightarrow a = 2$, y $z = 5i$.

d. Dos complejos son iguales si coinciden sus partes reales e imaginarias: $x + 2 = 5 \Rightarrow x = 3$; $2y - 1 = 7 \Rightarrow y = 4$.

Solución del ejercicio 3

a. Se suman y restan por separado las partes reales y las imaginarias: $z_1 + z_2 = (3 + 1) + (4 - 2)i = 4 + 2i$ y $z_1 - z_2 = (3 - 1) + (4 + 2)i = 2 + 6i$.

b. Multiplicamos como polinomios y sustituimos $i^2 = -1$: $(3 + 4i)(1 - 2i) = 3 - 6i + 4i - 8i^2 = 3 - 2i + 8 = 11 - 2i$.

c. $\bar{z}_1 = 3 - 4i$. Es una suma por diferencia: $(3 + 4i)(3 - 4i) = 9 - 16i^2 = 9 + 16 = 25$. Se obtiene un número real; en general $z\bar{z} = a^2 + b^2 = |z|^2$.

d. Primero el cuadrado: $(2 + i)^2 = 4 + 4i + i^2 = 3 + 4i$. Después multiplicamos por $2 + i$: $(3 + 4i)(2 + i) = 6 + 3i + 8i + 4i^2 = 2 + 11i$.

Solución del ejercicio 4

a. El conjugado del denominador es $1 + 2i$. Multiplicamos arriba y abajo:

$\frac{(3+4i)(1+2i)}{(1-2i)(1+2i)} = \frac{3+6i+4i+8i^2}{1+4} = \frac{-5+10i}{5} = -1+2i.$

b. Multiplicamos por $2+i$: $\frac{5(2+i)}{(2-i)(2+i)} = \frac{10+5i}{4+1} = \frac{10+5i}{5} = 2+i.$

c. Multiplicamos por $1+i$: $\frac{(1+i)^2}{(1-i)(1+i)} = \frac{1+2i+i^2}{2} = \frac{2i}{2} = i.$

d. El inverso es $\frac{1}{z}$. Multiplicando por el conjugado: $\frac{1}{4-3i} = \frac{4+3i}{(4-3i)(4+3i)} = \frac{4+3i}{16+9} = \frac{4}{25} + \frac{3}{25}i$. Comprobación: $(4-3i)(4+3i) = 25$, y dividido entre 25 da 1.

Solución del ejercicio 5

a. El discriminante es $4-20 = -16$, negativo, así que las soluciones son complejas: $x = \frac{-2 \pm \sqrt{-16}}{2} = \frac{-2 \pm 4i}{2} = -1 \pm 2i.$

b. Suma: $(-1+2i)+(-1-2i) = -2 = -\frac{2}{1}$. Producto: es una suma por diferencia, $(-1)^2 - (2i)^2 = 1+4 = 5 = \frac{5}{1}$. Se cumplen las relaciones de Cardano-Vieta también con soluciones complejas.

c. Una ecuación con soluciones de suma S y producto P es $x^2 - Sx + P = 0$. Aquí $S = 6$ y $P = (3+i)(3-i) = 9+1 = 10$: $x^2 - 6x + 10 = 0$.

d. Factorizamos la diferencia de cuadrados: $x^4 - 16 = (x^2-4)(x^2+4) = 0$. De $x^2 = 4$, $x = \pm 2$; de $x^2 = -4$, $x = \pm 2i$. Hay cuatro soluciones, tantas como indica el grado.

Solución del ejercicio 6

a. $|z_1| = \sqrt{1+3} = 2$, $\tan\alpha = \sqrt{3}$ en el primer cuadrante: $z_1 = 2_{60^\circ}$. $|z_2| = \sqrt{2}$ y el punto $(-1,1)$ está en el segundo cuadrante: $z_2 = \sqrt{2}_{135^\circ}$.

b. $|z_3| = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}$, tercer cuadrante, $\tan\alpha = 1$: $z_3 = 2\sqrt{2}_{225^\circ}$. z_4 está sobre el semieje imaginario negativo: 3_{270°.

c. $4_{30^\circ} = 4(\cos 30^\circ + i\,\mathrm{sen}\,30^\circ) = 2\sqrt{3} + 2i$. $5_{180^\circ} = -5$.

d. z_1 en el primer cuadrante, z_2 en el segundo, z_3 en el tercero y z_4 sobre el eje imaginario, por debajo del origen.

Solución del ejercicio 7

a. Multiplicar por $i = 1_{90^\circ}$ gira 90°: $(4+2i)\cdot i = 4i + 2i^2 = -2+4i$. El personaje pasa del primer al segundo cuadrante.

b. Girar 180° es multiplicar por $1_{180^\circ} = -1$: se obtiene $-4-2i$, el opuesto, simétrico

respecto del centro de la pantalla.

c. $1_{60^\circ} = \cos 60^\circ + i\,\text{sen}\,60^\circ = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$. Entonces $(4+2i)\left(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i\right) = 2 + 2\sqrt{3}i + i + \sqrt{3}i^2 = (2-\sqrt{3}) + (2\sqrt{3}+1)i \approx 0{,}27 + 4{,}46i$.

d. $|4+2i| = \sqrt{20}$ y también $|-2+4i| = |-4-2i| = \sqrt{20}$. Al multiplicar complejos los módulos se multiplican, y $|1_\alpha| = 1$, así que la distancia al centro se conserva: un giro no acerca ni aleja el punto.

Solución del ejercicio 8

a. Multiplicamos los módulos y sumamos los argumentos: $3_{40^\circ} \cdot 2_{50^\circ} = 6_{90^\circ}$. En forma binómica, $6(\cos 90^\circ + i\,\text{sen}\,90^\circ) = 6i$.

b. Dividimos los módulos y restamos los argumentos: $\dfrac{6_{150^\circ}}{3_{60^\circ}} = 2_{90^\circ} = 2i$.

c. Elevamos el módulo y multiplicamos el argumento: $(2_{30^\circ})^4 = 16_{120^\circ} = 16\left(-\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i\right) = -8 + 8\sqrt{3}\,i$.

d. Polar: $|1+i| = \sqrt{2}$ y su argumento es 45°, así que $(1+i)^8 = (\sqrt{2})^8_{360^\circ} = 16_{0^\circ} = 16$. Binómica: $(1+i)^2 = 2i$ y $(2i)^4 = 16i^4 = 16$. La polar evita desarrollar potencias largas y es más rápida.

Solución del ejercicio 9

a. El módulo es $\sqrt{a^2+b^2}$: $|Z_1| = \sqrt{9+16} = 5\ \Omega$ y $|Z_2| = \sqrt{36+64} = 10\ \Omega$.

b. Sumamos partes reales e imaginarias: $Z_1 + Z_2 = (3+6) + (4-8)i = 9 - 4i$, con módulo $\sqrt{81+16} = \sqrt{97} \approx 9{,}85\ \Omega$. No es la suma de los módulos (15 Ω), porque las partes imaginarias se compensan en parte.

c. $(3+4i)(6-8i) = 18 - 24i + 24i - 32i^2 = 18 + 32 = 50$: el producto es real.

d. Multiplicamos por el conjugado del denominador: $Z = \dfrac{50}{9-4i} = \dfrac{50(9+4i)}{81+16} = \dfrac{450}{97} + \dfrac{200}{97}i \approx 4{,}64 + 2{,}06i$. Su módulo es $\frac{50}{\sqrt{97}} \approx 5{,}08\ \Omega$.

Solución del ejercicio 10

a. Pasamos a polar: $|1+i| = \sqrt{2}$ y argumento 45°. Por De Moivre, $(\sqrt{2})^{10}_{450^\circ} = 32_{90^\circ}$, porque $450^\circ = 360^\circ + 90^\circ$. Resultado: $32i$.

b. $1 - i = \sqrt{2}_{315^\circ}$. Entonces $(\sqrt{2})^6_{1\,890^\circ} = 8_{90^\circ} = 8i$, ya que $1\,890^\circ = 5 \cdot 360^\circ + 90^\circ$.

c. $|\sqrt{3}+i| = \sqrt{3+1} = 2$ y $\text{tg}\,\alpha = \frac{1}{\sqrt{3}}$, luego $\alpha = 30^\circ$. Entonces $2^6_{180^\circ} = 64_{180^\circ} = -64$.

d. $(1+i)^n = (\sqrt{2})^n_{45°n}$ es real cuando su argumento es múltiplo de $180°$: $45°n = 180°k$, es decir, cuando n es múltiplo de 4.

Solución del ejercicio 11

a. 8 es real positivo, así que $8 = 8_{0°}$. El módulo de las raíces es $\sqrt[3]{8} = 2$ y los argumentos son $\frac{0°+360°k}{3}$ con $k = 0, 1, 2$: $2_{0°}$, $2_{120°}$ y $2_{240°}$.

b. $2_{0°} = 2$; $2_{120°} = 2\left(-\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i\right) = -1 + \sqrt{3}\,i$; $2_{240°} = -1 - \sqrt{3}\,i$.

c. $2 + (-1 + \sqrt{3}i) + (-1 - \sqrt{3}i) = 0$. Las tres puntas están equilibradas alrededor del centro: su centro de gravedad es el origen, condición para que el rotor esté compensado.

d. $|2 - (-1 + \sqrt{3}i)| = |3 - \sqrt{3}i| = \sqrt{9+3} = \sqrt{12} = 2\sqrt{3} \approx 3{,}46$ unidades, el lado del triángulo equilátero.

Solución del ejercicio 12

a. -16 está sobre el semieje real negativo: módulo 16 y argumento $180°$, es decir, $-16 = 16_{180°}$.

b. El módulo de las raíces es $\sqrt[4]{16} = 2$ y los argumentos son $\frac{180°+360°k}{4}$, con $k = 0, 1, 2, 3$: $2_{45°} = \sqrt{2} + \sqrt{2}i$, $2_{135°} = -\sqrt{2} + \sqrt{2}i$, $2_{225°} = -\sqrt{2} - \sqrt{2}i$ y $2_{315°} = \sqrt{2} - \sqrt{2}i$.

c. Las cuatro están a 2 m del origen y separadas $90°$, así que forman un cuadrado. Lado: $|(\sqrt{2} + \sqrt{2}i) - (-\sqrt{2} + \sqrt{2}i)| = |2\sqrt{2}| = 2\sqrt{2} \approx 2{,}83$ m.

d. Área $= \text{lado}^2 = (2\sqrt{2})^2 = 8$ m².

Solución del ejercicio 13

a. Pasamos de polar a binómica con $a = r\cos\alpha$ y $b = r\,\text{sen}\,\alpha$: $5(\cos 30° + i\,\text{sen}\,30°) = \frac{5\sqrt{3}}{2} + \frac{5}{2}i \approx 4{,}33 + 2{,}5i$ dm.

b. Estirar un 20 % es multiplicar la longitud por 1,2, y girar $45°$ es sumar ese ángulo. Ambas cosas se consiguen multiplicando por $1{,}2_{45°}$.

c. Módulos multiplicados y argumentos sumados: $5_{30°} \cdot 1{,}2_{45°} = 6_{75°}$. En binómica, $6\cos 75° + 6\,\text{sen}\,75°\,i \approx 1{,}55 + 5{,}80i$ dm.

d. Hay que deshacer la transformación: dividir entre $1{,}2_{45°}$, es decir, multiplicar por $\left(\frac{1}{1{,}2}\right)_{-45°}$. Así se vuelve a $5_{30°}$.

Solución del ejercicio 14

a. $10_{30^\circ} = 5\sqrt{3} + 5i \approx 8{,}660 + 5i$. $8_{120^\circ} = -4 + 4\sqrt{3}i \approx -4 + 6{,}928i$.
b. $(8{,}660 - 4) + (5 + 6{,}928)i = 4{,}660 + 11{,}928i$.
c. Módulo $\sqrt{4{,}660^2 + 11{,}928^2} \approx 12{,}81$ millas; argumento $\arctan \frac{11{,}928}{4{,}660} \approx 68{,}66^\circ$. Para volver hay que navegar en la dirección opuesta, $68{,}66^\circ + 180^\circ = 248{,}66^\circ$.
d. Los argumentos difieren en 90°. Además, por Pitágoras, $\sqrt{10^2 + 8^2} = \sqrt{164} \approx 12{,}81$, que coincide con la distancia.

Solución del ejercicio 15

a. $z_1 = 0^2 + i = i$; $z_2 = i^2 + i = -1 + i$; $z_3 = (-1 + i)^2 + i = (1 - 2i - 1) + i = -i$; $z_4 = (-i)^2 + i = -1 + i$.
b. A partir de z_2 los términos se repiten: $-1 + i,\ -i,\ -1 + i,\ -i, \ldots$ Los módulos son $\sqrt{2}$ y 1, están acotados: $c = i$ pertenece al conjunto.
c. $0,\ 1,\ 2,\ 5,\ 26,\ 677, \ldots$ Crecen sin límite: $c = 1$ no pertenece.
d. $0,\ -1,\ 0,\ -1, \ldots$ La sucesión oscila y está acotada: $c = -1$ pertenece.
e. Para cada punto hay que calcular decenas o cientos de términos, y la imagen tiene millones de puntos: solo un ordenador puede hacer tantas operaciones.

Solución del ejercicio 16

a. $1_{60^\circ} = \cos 60^\circ + i \operatorname{sen} 60^\circ = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$.
b. $2_{0^\circ} = 2$; $2_{60^\circ} = 1 + \sqrt{3}i$; $2_{120^\circ} = -1 + \sqrt{3}i$; $2_{180^\circ} = -2$; $2_{240^\circ} = -1 - \sqrt{3}i$; $2_{300^\circ} = 1 - \sqrt{3}i$.
c. $|(1 + \sqrt{3}i) - 2| = |-1 + \sqrt{3}i| = \sqrt{1 + 3} = 2$ dm. Perímetro: $6 \cdot 2 = 12$ dm.
d. Cada triángulo tiene área $\frac{\sqrt{3}}{4} \cdot 2^2 = \sqrt{3}$: total $6\sqrt{3} \approx 10{,}39$ dm².
e. 12 m² $= 1\,200$ dm². $\frac{1\,200}{10{,}392} \approx 115{,}5$: hacen falta 116 baldosas, porque con 115 quedaría una parte sin cubrir (y en la práctica se compra alguna más por los recortes).

Solución del ejercicio 17

a. La distancia es el módulo de $B - A = 4 + 2i$: $\sqrt{16 + 4} = \sqrt{20} \approx 4{,}472$ unidades, es decir, unos 44,7 m.
b. $1_{60^\circ} = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$. Entonces
$C = (4 + 2i)\left(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i\right) = 2 + 2\sqrt{3}i + i - \sqrt{3} = (2 - \sqrt{3}) + (2\sqrt{3} + 1)i \approx 0{,}268 + 4{,}464i$

.

c. $C - B \approx (0{,}268 - 4) + (4{,}464 - 2)i = -3{,}732 + 2{,}464i$, cuyo módulo es $\sqrt{13{,}928 + 6{,}072} = \sqrt{20}$. Coincide con $|B - A|$, y como $|C - A| = \sqrt{20}$ por ser un giro, el triángulo es equilátero.

d. Con $-60°$: $(4 + 2i)\left(\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i\right) = (2 + \sqrt{3}) + (1 - 2\sqrt{3})i \approx 3{,}732 - 2{,}464i$, que queda por debajo de la recta AB. Conviene la primera, $0{,}268 + 4{,}464i$.

Solución del ejercicio 18

a. $x(10 - x) = 40 \Rightarrow x^2 - 10x + 40 = 0$.

b. $x = \dfrac{10 \pm \sqrt{100 - 160}}{2} = \dfrac{10 \pm \sqrt{-60}}{2} = 5 \pm \sqrt{15}\,i$.

c. $(5 + \sqrt{15}i) + (5 - \sqrt{15}i) = 10$. $(5 + \sqrt{15}i)(5 - \sqrt{15}i) = 25 + 15 = 40$.

d. $x(10 - x)$ es una parábola con vértice en $x = 5$, donde vale 25. Como $40 > 25$, ningún par de números reales cumple la condición.

e. Un rectángulo de perímetro 20 m y área 40 m²: los lados cumplen la misma ecuación y no existen. Ningún rectángulo de perímetro 20 m puede tener más de 25 m².

Solución del ejercicio 19

a. Despejamos z y dividimos multiplicando por el conjugado:
$z = \dfrac{3 + 4i}{2 + i} = \dfrac{(3 + 4i)(2 - i)}{5} = \dfrac{6 - 3i + 8i + 4}{5} = \dfrac{10 + 5i}{5} = 2 + i$.

b. Escribimos $z = a + bi$, $\bar{z} = a - bi$: $(a + bi) + 2(a - bi) = 3a - bi$. Igualando con $6 - i$: $3a = 6$ y $-b = -1$. Luego $a = 2$, $b = 1$ y $z = 2 + i$.

c. $z\bar{z} = a^2 + b^2 = 25$ y $a = 3$, así que $b^2 = 16$ y $b = \pm 4$. Soluciones: $3 + 4i$ y $3 - 4i$.

d. Las dos tienen módulo $\sqrt{25} = 5$. Como $\operatorname{arctg} \frac{4}{3} \approx 53{,}13°$, $3 + 4i = 5_{53{,}13°}$ (primer cuadrante) y $3 - 4i = 5_{306{,}87°}$ (cuarto cuadrante).

Solución del ejercicio 20

a. Desarrollamos el cuadrado: $\cos^2\alpha + 2i\,\operatorname{sen}\alpha\cos\alpha + i^2\operatorname{sen}^2\alpha$. Por De Moivre también vale $\cos 2\alpha + i\operatorname{sen}2\alpha$. Igualando partes reales e imaginarias: $\cos 2\alpha = \cos^2\alpha - \operatorname{sen}^2\alpha$ y $\operatorname{sen}2\alpha = 2\operatorname{sen}\alpha\cos\alpha$.

b. Con $c = \cos\alpha$, $s = \operatorname{sen}\alpha$: $(c + is)^3 = c^3 + 3c^2is - 3cs^2 - is^3$. La parte real es $c^3 - 3cs^2 = c^3 - 3c(1 - c^2) = 4c^3 - 3c$, que debe ser $\cos 3\alpha$.

c. La parte imaginaria es $3c^2s - s^3 = 3(1 - s^2)s - s^3 = 3s - 4s^3$, que debe ser $\operatorname{sen}3\alpha$.

d. Con $\alpha = 60°$, $3\alpha = 180°$: $4 \cdot \frac{1}{8} - 3 \cdot \frac{1}{2} = -1 = \cos 180°$ y

$3 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} - 4 \cdot \frac{3\sqrt{3}}{8} = 0 = \operatorname{sen} 180^\circ.$