Soluciones del examen - Funciones exponenciales y logarítmicas

Curso: 1 Bachillerato Ciencias · Duración: 55 minutos · /20

Solución del ejercicio 1 (4 puntos)

a. Buscamos el exponente en cada caso. $3^5 = 243$, así que $\log_3 243 = 5$. $2^{-4} = \frac{1}{16}$, así que $\log_2 \frac{1}{16} = -4$. Para $\log_4 8$ escribimos ambos como potencias de 2: $4^x = 2^{2x} = 2^3$, luego $x = \frac{3}{2}$. Comprobación: $4^{3/2} = (\sqrt{4})^3 = 8$.

b. Descomponemos: $18 = 2 \cdot 3^2$, luego $\log 18 = \log 2 + 2\log 3 = 0{,}301 + 0{,}954 = 1{,}255$. $\frac{4}{3} = \frac{2^2}{3}$, luego $\log \frac{4}{3} = 2\log 2 - \log 3 = 0{,}602 - 0{,}477 = 0{,}125$. Comprobación: $10^{1{,}255} \approx 18$.

c. Convertimos los coeficientes en exponentes y aplicamos producto y cociente: $\ln a^3 - \ln b^2 + \ln c = \ln \dfrac{a^3 c}{b^2}$. La expresión tiene sentido para a, b y c positivos.

Solución del ejercicio 2 (4 puntos)

a. Escribimos 8 como potencia de 2: $2^{x-1} = 2^3$. Igualando exponentes, $x - 1 = 3$, luego $x = 4$. Comprobación: $2^{4-1} = 8$.

b. Como $9^x = (3^x)^2$, hacemos el cambio $t = 3^x$: $t^2 - 10t + 9 = 0$, con soluciones $t = 1$ y $t = 9$ (ambas positivas, así que valen). Deshacemos el cambio: $3^x = 1$ da $x = 0$ y $3^x = 9$ da $x = 2$. Comprobación con $x = 2$: $81 - 10 \cdot 9 + 9 = 0$.

c. 40 no es potencia de 7, así que tomamos logaritmos: $x \ln 7 = \ln 40$, luego $x = \dfrac{\ln 40}{\ln 7} = \dfrac{3{,}6889}{1{,}9459} \approx 1{,}8957$. Comprobación: $7^{1{,}8957} \approx 40$.

Solución del ejercicio 3 (4 puntos)

a. $x(x+21) = 100 \Rightarrow x^2 + 21x - 100 = 0 \Rightarrow x = 4$ o $x = -25$. Se descarta -25 (argumento negativo). Solución: $x = 4$. Comprobación: $\log 4 + \log 25 = \log 100 = 2$. Aplicamos la propiedad del producto, $\log x + \log(x+21) = \log[x(x+21)]$, y la definición de logaritmo decimal: si $\log A = 2$, entonces $A = 10^2 = 100$. Las raíces salen de $x = \frac{-21 \pm 29}{2}$.

b. $x^2 = 4x - 3 \Rightarrow x^2 - 4x + 3 = 0 \Rightarrow x = 1$ o $x = 3$. Las dos dan argumentos positivos ($1 > 0$ y $4 \cdot 1 - 3 = 1 > 0$; $3 > 0$ y $9 > 0$): son válidas. Primero escribimos $2\ln x = \ln x^2$ y, como el logaritmo es inyectivo, igualamos los argumentos. Comprobación con $x = 3$: $2\ln 3 = \ln 9$ y $\ln(12 - 3) = \ln 9$.

Solución del ejercicio 4 (3 puntos)

a. El argumento del logaritmo debe ser positivo: $x - 1 > 0$, así que el dominio es $(1, +\infty)$. Corte con el eje X: $f(x) = 0$ significa $x - 1 = 2^0 = 1$, luego $x = 2$; el punto es $(2, 0)$.
b. $f(3) = \log_2 2 = 1$, $f(5) = \log_2 4 = 2$, $f(9) = \log_2 8 = 3$: al duplicar $x - 1$ la función aumenta 1. Como $\lim_{x \to 1^+} f(x) = -\infty$, la recta $x = 1$ es asíntota vertical.
c. Despejamos x: $y = \log_2(x - 1)$ equivale a $x - 1 = 2^y$, luego $x = 2^y + 1$. Intercambiando las variables, $f^{-1}(x) = 2^x + 1$. Comprobación: $f^{-1}(1) = 3$ y $f(3) = 1$.

Solución del ejercicio 5 (5 puntos)

a. Perder un 10 % equivale a conservar el 90 %, es decir, multiplicar por 0,9 cada año: $V(t) = 1\,200 \cdot 0{,}9^t$. A los 3 años, $V(3) = 1\,200 \cdot 0{,}729 = 874{,}80$ €.
b. Planteamos $1\,200 \cdot 0{,}9^t = 600$, es decir, $0{,}9^t = 0{,}5$. Tomando logaritmos: $t = \dfrac{\ln 0{,}5}{\ln 0{,}9} \approx 6{,}58$ años.
c. Planteamos $1\,200 \cdot 0{,}9^t < 200$, es decir, $0{,}9^t < \frac{1}{6}$. Tomando logaritmos y dividiendo entre $\ln 0{,}9 < 0$ (cambia el sentido): $t > \dfrac{\ln(1/6)}{\ln 0{,}9} \approx 17{,}01$. Comprobación: $V(17) \approx 200{,}1$ € y $V(18) \approx 180{,}1$ €. A partir del año 18 ya no podrá venderla allí.