Apuntes - Funciones exponenciales y logarítmicas

Curso: 1 Bachillerato Ciencias

En este tema aprenderás: función exponencial, logaritmos, función logarítmica, ecuaciones exponenciales y logarítmicas y aplicaciones. Cada idea va en un cuadro de color, con ejemplos resueltos paso a paso.

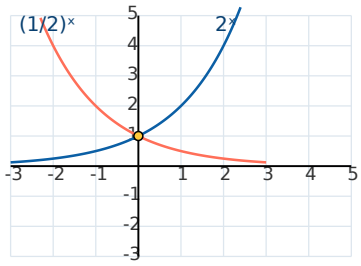
Actividad de introducción: el rumor que recorre el instituto

Un lunes a las 8:00 una alumna cuenta un rumor a dos amigos. Cada uno de ellos se lo cuenta a otros dos en la hora siguiente, y así sucesivamente. A las 9:00 lo saben 3 personas, a las 10:00 lo saben 7, a las 11:00, 15... El número de personas que se enteran cada hora es 2^t, y crece tan deprisa que antes de la hora de salida ya lo conoce todo el centro. Esta forma de crecer, multiplicando por el mismo número en cada unidad de tiempo, es el **crecimiento exponencial**. Aparece en los intereses de un banco, en un cultivo de bacterias, en la desintegración de un isótopo o en la temperatura de un café que se enfría. La pregunta inversa, ¿cuántas horas hacen falta para que lo sepan 1 000 personas?, se responde con los **logaritmos**, que deshacen la potencia. En este tema estudiarás las dos funciones, sus propiedades y sus gráficas, y resolverás ecuaciones en las que la incógnita está en el exponente.

Función exponencial

Propiedad

La función exponencial de base a ($a > 0$, $a \neq 1$) es $f(x) = a^x$. Su dominio es $\mathbb{R}$ y su recorrido $(0, +\infty)$. Siempre pasa por $(0, 1)$ y por $(1, a)$, y el eje X ($y = 0$) es una **asíntota horizontal**. Si $a > 1$ es creciente; si 0 es decreciente. La base más importante es el número $e \approx 2{,}718$.



Logaritmos

Definición: logaritmo

El **logaritmo** en base a de $N > 0$ es el exponente al que hay que elevar a para

obtener N: $\log_a N = x \iff a^x = N$. Por ejemplo, $\log_2 32 = 5$ porque $2^5 = 32$; $\log_3 \frac{1}{9} = -2$ porque $3^{-2} = \frac{1}{9}$. El logaritmo decimal es $\log = \log_{10}$ y el neperiano $\ln = \log_e$. Solo existen logaritmos de números positivos y se cumple $\log_a 1 = 0$, $\log_a a = 1$.

Propiedades

$(M, N > 0)$: $\log_a(MN) = \log_a M + \log_a N$; $\log_a \frac{M}{N} = \log_a M - \log_a N$; $\log_a M^p = p \log_a M$. El **cambio de base** es $\log_a N = \frac{\ln N}{\ln a}$; por ejemplo, $\log_3 20 = \frac{\ln 20}{\ln 3} \approx 2{,}727$.

Ejemplo 1

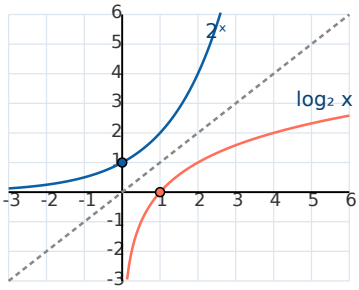
$\log 8 + \log 125 = \log(8 \cdot 125) = \log 1000 = 3$.

Y $\log_2 40 - \log_2 5 = \log_2 8 = 3$.

Función logarítmica

Propiedad

$f(x) = \log_a x$ es la función **inversa** de a^x: sus gráficas son simétricas respecto de la recta $y = x$. Su dominio es $(0, +\infty)$, su recorrido $\mathbb{R}$, pasa por $(1, 0)$ y tiene la **asíntota vertical** $x = 0$. Es creciente si $a > 1$.



Ejemplo 2

Para $f(x) = 2^x - 3$, la gráfica de 2^x baja 3 unidades: la asíntota pasa a ser $y = -3$ y corta al eje Y en $f(0) = -2$.

Corta al eje X cuando $2^x = 3$, es decir, $x = \log_2 3 \approx 1{,}585$.

Ejemplo 3

La inversa de $f(x) = 2^x + 1$ se obtiene despejando: $y - 1 = 2^x \Rightarrow x = \log_2(y - 1)$.

Por tanto $f^{-1}(x) = \log_2(x - 1)$, con dominio $(1, +\infty)$, que es el recorrido de f. Dominio y recorrido se intercambian siempre al invertir.

Regla

El dominio de una función logarítmica se halla exigiendo que el argumento sea positivo: para $g(x) = \log(x^2 - 4)$ se necesita $x^2 - 4 > 0$, es decir, $x \in (-\infty, -2) \cup (2, +\infty)$.

Ecuaciones exponenciales y logarítmicas

Propiedad

Exponenciales. Se igualan las bases ($3^{x-1} = 81 \Rightarrow x - 1 = 4$) o se hace un cambio de variable. Para $4^x - 3 \cdot 2^x - 4 = 0$ se pone $t = 2^x$: $t^2 - 3t - 4 = 0 \Rightarrow t = 4$ o $t = -1$. Como $2^x > 0$, solo vale $t = 4$, luego $x = 2$.

Propiedad

Logarítmicas. Se agrupan los logaritmos con las propiedades y se pasa a forma exponencial. $\log x + \log(x - 3) = 1 \Rightarrow \log[x(x - 3)] = 1 \Rightarrow x^2 - 3x = 10 \Rightarrow x = 5$ o $x = -2$. Hay que comprobar el dominio: $x = -2$ haría negativos los argumentos, así que la solución es $x = 5$.

Cómo se hace: resolver ecuaciones exponenciales y logarítmicas

1. Exponencial: iguala las bases si puedes; si no, toma logaritmos en los dos miembros.
2. Logarítmica: agrupa con las propiedades hasta tener un solo logaritmo y pasa a forma exponencial.
3. Si hace falta, usa un cambio de variable ($t = a^x$) para obtener una ecuación algebraica.
4. Comprueba siempre: los argumentos de los logaritmos deben ser positivos.

Ejemplo 4: ecuación logarítmica

Resuelve $\log_2 x + \log_2(x - 2) = 3$.

Agrupamos: $\log_2[x(x - 2)] = 3$, luego $x(x - 2) = 2^3 = 8$ y $x^2 - 2x - 8 = 0$, con $x = 4$ o $x = -2$. El valor $x = -2$ no sirve porque los argumentos serían negativos. La solución es $x = 4$.

Aplicaciones

Propiedad

El **interés compuesto** da el capital final $C = C_0(1 + r)^t$: 5000 € al 3 % anual durante 10 años dan $5000 \cdot 1{,}03^{10} \approx 6\,719{,}58$ €. Para saber cuándo se duplica,

$1{,}03^t = 2 \Rightarrow t = \frac{\ln 2}{\ln 1{,}03} \approx 23{,}4$ años. La **desintegración radiactiva** sigue $N(t) = N_0\left(\frac{1}{2}\right)^{t/T}$, con T el periodo de semidesintegración.

¡Atención! Errores frecuentes

- Escribir $\log(M+N) = \log M + \log N$: es falso; la propiedad es del producto.
- Olvidar comprobar el dominio en las ecuaciones logarítmicas.
- Aceptar $2^x = -1$: una exponencial siempre es positiva.
- Confundir $\log_a N$ con $\frac{\log N}{\log a}$ mal colocado: el cociente es $\frac{\ln N}{\ln a}$, no al revés.

El número e y el crecimiento continuo

Definición: el número e

El número $e \approx 2{,}71828$ es el límite de $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ cuando n crece sin límite. Es irracional y aparece de forma natural cuando algo crece de manera continua. La función $f(x) = e^x$ se llama **función exponencial natural** y su inversa es el **logaritmo neperiano**, $\ln x = \log_e x$. Cualquier exponencial puede escribirse con base e, porque $a^x = e^{x \ln a}$.

Propiedad: modelos de crecimiento y de decrecimiento

Una magnitud que se multiplica por el mismo factor b en cada unidad de tiempo sigue el modelo $y = y_0 \cdot b^t$. Si aumenta un r % cada periodo, el factor es $b = 1 + \frac{r}{100}$; si disminuye un r %, es $b = 1 - \frac{r}{100}$. El **tiempo de duplicación** es la solución de $b^t = 2$ y el **periodo de semidesintegración** o vida media, la de $b^t = \frac{1}{2}$. Los dos tiempos no dependen de la cantidad inicial y_0.

Ejemplo 5

Una ciudad de 150 000 habitantes pierde un 2 % de población al año. ¿Cuándo bajará de 120 000?

El factor es $b = 0{,}98$, así que $P(t) = 150\,000 \cdot 0{,}98^t$. Planteamos $0{,}98^t$. Tomando logaritmos, $t \ln 0{,}98$, y al dividir por $\ln 0{,}98$, que es negativo, el sentido de la desigualdad cambia: $t > \frac{\ln 0{,}8}{\ln 0{,}98} \approx 11{,}05$. La población baja de 120 000 a partir del año 12.

Gráficas y transformaciones

Propiedad: las gráficas de a^x y de $\log_a x$

Las funciones $y = a^x$ e $y = \log_a x$ son inversas, de modo que sus gráficas son

simétricas respecto de la bisectriz $y = x$. La exponencial pasa por $(0, 1)$ y $(1, a)$, tiene dominio $\mathbb{R}$, recorrido $(0, +\infty)$ y asíntota horizontal $y = 0$. La logarítmica pasa por $(1, 0)$ y $(a, 1)$, tiene dominio $(0, +\infty)$, recorrido $\mathbb{R}$ y asíntota vertical $x = 0$. Las dos son crecientes si $a > 1$ y decrecientes si 0. Al trasladar, por ejemplo $y = 2^{x-3} + 1$, la gráfica se desplaza 3 unidades a la derecha y 1 hacia arriba, y la asíntota pasa a ser $y = 1$.

Ejemplo 6

Calcula el dominio, la asíntota y el corte con los ejes de $f(x) = \ln(2x - 4)$.

El argumento debe ser positivo: $2x - 4 > 0 \Rightarrow x > 2$, así que el dominio es $(2, +\infty)$ y la asíntota vertical es $x = 2$. El corte con el eje X se obtiene con $\ln(2x - 4) = 0$, es decir, $2x - 4 = 1$ y $x = \frac{5}{2}$. No corta al eje Y, porque $x = 0$ no está en el dominio.

Escalas logarítmicas

Observación: por qué se usan escalas logarítmicas

Cuando una magnitud varía entre valores muy pequeños y muy grandes, se mide su logaritmo para trabajar con números manejables. Así se construyen la escala de Richter para los terremotos, los decibelios para el sonido y el pH para la acidez. En todas ellas, sumar una unidad a la escala significa multiplicar la magnitud original por 10, y sumar 2 significa multiplicarla por 100. Por eso un terremoto de magnitud 7 no es «un poco» mayor que uno de magnitud 6: su amplitud es diez veces mayor.

Ejemplo 7

Un aspirador produce 70 dB y una moto, 90 dB. ¿Cuántas veces más intensa es la moto?

Con $L = 10 \log \frac{I}{I_0}$: $\frac{I_{\text{moto}}}{I_0} = 10^9$ y $\frac{I_{\text{asp}}}{I_0} = 10^7$. El cociente es $10^2 = 100$: la moto es cien veces más intensa, aunque el nivel en decibelios solo haya aumentado de 70 a 90.

Inecuaciones exponenciales y logarítmicas

Cómo se hace: resolver una inecuación con la incógnita en el exponente

1. Aísla la potencia: a^x o $a^x > k$.
2. Toma logaritmos en los dos miembros o escribe k como potencia de a.
3. Si la base es mayor que 1, la función es creciente y el sentido de la desigualdad se mantiene; si está entre 0 y 1, es decreciente y el sentido cambia.
4. En las logarítmicas, añade la condición de que los argumentos sean positivos e intersecta los intervalos.

Ejemplo 8

Resuelve $\log_{0,5}(x-1) > -2$.

Primero, el argumento debe ser positivo: $x > 1$. Después escribimos $-2 = \log_{0,5} 0{,}5^{-2} = \log_{0,5} 4$. Como la base $0{,}5$ es menor que 1, la función logarítmica es decreciente y el sentido de la desigualdad cambia: $x - 1$, es decir, x. Intersectando con la condición del dominio, la solución es el intervalo $(1, 5)$. Comprobación con $x = 3$: $\log_{0,5} 2 = -1 > -2$, y con $x = 9$: $\log_{0,5} 8 = -3$, que no cumple la desigualdad.

¿Sabías que? Las tablas de Napier

En 1614 el escocés John Napier publicó las primeras tablas de logaritmos. Los astrónomos de la época, como Kepler, las recibieron con entusiasmo: convertían las multiplicaciones larguísimas de sus cálculos en sumas, y las raíces en divisiones. Durante más de tres siglos, ingenieros y navegantes usaron tablas y reglas de cálculo basadas en logaritmos, hasta que llegaron las calculadoras electrónicas en la década de 1970. Poco después, el inglés Henry Briggs propuso usar la base 10, que facilitaba los cálculos con números escritos en el sistema decimal; por eso hoy se llaman logaritmos decimales o de Briggs, mientras que los de base e reciben el nombre de neperianos en honor de Napier.

El consejo de Otto

Un logaritmo es un exponente: ante cualquier duda, pásalo a forma exponencial y la solución se ve sola.