Ejercicios - Funciones exponenciales y logarítmicas

Curso: 1 Bachillerato Ciencias · 20

Se debe mostrar el desarrollo de cada ejercicio.

Ejercicio 1

Ejercicio 1 – Dos funciones exponenciales

Consideramos las funciones $f(x) = 2^x$ y $g(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^x$.

x	−2	−1	0	1	2	3
2^x	…	…	…	…	…	…
(1/2)^x	…	…	…	…	…	…

a. Completa una tabla de valores para $x = -2, -1, 0, 1, 2, 3$.
b. Indica el dominio, el recorrido y el punto de corte con el eje Y de cada una.
c. ¿Cuál es creciente y cuál decreciente? Justifícalo a partir de la base.
d. Explica qué relación de simetría hay entre las dos gráficas.

Ejercicio 2

Ejercicio 2 – Logaritmos por la definición

Recuerda que $\log_a b = c$ significa $a^c = b$. Calcula sin calculadora, escribiendo la potencia que justifica cada resultado.

a. $\log_2 32$ y $\log_3 \frac{1}{81}$
b. $\log_5 \sqrt{5}$ y $\log_{0,5} 8$
c. $\log 0{,}001$ y $\ln e^4$
d. El valor de x en $\log_x 49 = 2$ y en $\log_2 x = -3$.

Ejercicio 3

Ejercicio 3 – Propiedades de los logaritmos

Sabiendo que $\log 2 \approx 0{,}301$ y $\log 3 \approx 0{,}477$, calcula los logaritmos siguientes usando solo las propiedades (producto, cociente y potencia).

a. $\log 12$ y $\log 1{,}5$
b. $\log 72$ y $\log 5$
c. $\log \sqrt{0{,}6}$

d. Escribe como un solo logaritmo: $2\log x + \log y - \frac{1}{2}\log z$.

Ejercicio 4

Ejercicio 4 – Cambio de base

La calculadora solo tiene las teclas $\log$ y $\ln$. Para otras bases se usa $\log_a b = \frac{\log b}{\log a} = \frac{\ln b}{\ln a}$.

a. Calcula $\log_2 10$ con cuatro decimales.
b. Calcula $\log_3 20$ con cuatro decimales, usando $\ln$.
c. Calcula $\log_5 0{,}2$ de forma exacta.
d. Demuestra que $\log_a b \cdot \log_b a = 1$.

Ejercicio 5

Ejercicio 5 – Ecuaciones exponenciales

Resuelve las ecuaciones siguientes. Cuando sea posible, iguala las bases; si no, toma logaritmos; si aparecen a^x y a^{2x}, haz un cambio de variable.

a. $2^{x+1} = 32$
b. $3^{2x-1} = \frac{1}{27}$
c. $4^x - 6 \cdot 2^x + 8 = 0$
d. $5^x = 12$

Ejercicio 6

Ejercicio 6 – Ecuaciones logarítmicas

Resuelve las ecuaciones y comprueba siempre las soluciones: el argumento de un logaritmo debe ser positivo.

a. $\log x + \log(x-3) = 1$
b. $2\log x = \log(5x-6)$
c. $\log_2(x+1) - \log_2(x-1) = 3$

Ejercicio 7

Ejercicio 7 – La cuenta de ahorro

Lucía deposita 5 000 € en una cuenta a plazo fijo de un banco de Zaragoza que paga un 3 % de interés compuesto anual. El capital al cabo de t años es $C(t) = 5\,000 \cdot 1{,}03^t$.

a. Explica por qué el factor es $1{,}03$ y calcula el capital a los 5 y a los 10 años.
b. ¿Cuántos euros de intereses habrá generado en 10 años?

c. ¿Al cabo de cuántos años completos habrá duplicado su capital?
d. ¿El tiempo de duplicación depende de la cantidad inicial? Justifícalo.

Ejercicio 8

Ejercicio 8 – Un cultivo de bacterias

En el laboratorio de Biología del instituto se siembra un cultivo con 200 bacterias. La población se duplica cada 3 horas, de modo que $N(t) = 200 \cdot 2^{t/3}$, con t en horas.

a. ¿Cuántas bacterias habrá al cabo de 12 horas?
b. ¿Cuánto tiempo tarda la población en llegar a 51 200 bacterias?
c. Calcula el factor por el que se multiplica la población cada hora y el porcentaje de crecimiento horario.
d. Escribe la función en la forma $N(t) = 200 \cdot e^{kt}$ y da el valor de k.

Ejercicio 9

Ejercicio 9 – La datación con carbono 14

El carbono 14 de un ser vivo se desintegra después de su muerte con un periodo de semidesintegración de 5 730 años: cada 5 730 años queda la mitad. La fracción que queda al cabo de t años es $P(t) = 0{,}5^{t/5\,730}$.

a. ¿Qué fracción queda al cabo de 11 460 años? ¿Y al cabo de 2 000 años?
b. En un yacimiento de Atapuerca se analiza un hueso que conserva el 30 % de su carbono 14 original. Estima su antigüedad.
c. ¿Por qué este método no sirve para fechar fósiles de dinosaurios de hace 70 millones de años?

Ejercicio 10

Ejercicio 10 – La escala de Richter

La magnitud de un terremoto es $M = \log \dfrac{A}{A_0}$, donde A es la amplitud registrada por el sismógrafo y A_0 una amplitud de referencia. La energía liberada, en julios, cumple $\log E = 1{,}5M + 4{,}8$.

a. Un terremoto en Granada tiene $M = 4$ y otro en el sur de Portugal, $M = 6$. ¿Cuántas veces mayor es la amplitud del segundo?
b. ¿Cuántas veces más energía libera el segundo?
c. Si la amplitud de un sismo se multiplica por 10, ¿cuánto aumenta su magnitud?
d. Calcula la energía de un terremoto de magnitud 5.

Ejercicio 11

Ejercicio 11 – El volumen de un concierto

El nivel sonoro, en decibelios, es $L = 10 \log \frac{I}{I_0}$, donde I es la intensidad en W/m² y $I_0 = 10^{-12}$ W/m² es el umbral de audición.

a. Calcula el nivel de una conversación con $I = 10^{-6}$ W/m² y el de una calle con tráfico, $I = 10^{-5}$ W/m².
b. En un concierto en Madrid se miden 100 dB. ¿Qué intensidad corresponde?
c. Si se duplica la intensidad, ¿cuántos decibelios aumenta el nivel?
d. La normativa recomienda no superar 85 dB. ¿Cuántas veces es más intensa la música del concierto que ese límite?

Ejercicio 12

Ejercicio 12 – El pH de lo que bebemos

El pH de una disolución es $\mathrm{pH} = -\log[\mathrm{H}^+]$, donde $[\mathrm{H}^+]$ es la concentración de iones de hidrógeno en mol/L. Un pH menor que 7 indica una disolución ácida.

a. El zumo de limón tiene $[\mathrm{H}^+] = 0{,}005$ mol/L. Calcula su pH.
b. El agua del Mediterráneo tiene pH 8,2. Calcula su concentración de iones.
c. Un refresco tiene pH 3 y un café pH 5. ¿Cuántas veces más ácido es el refresco?
d. ¿Qué le ocurre al pH si la concentración de iones se divide entre 10?

Ejercicio 13

Ejercicio 13 – La población de un municipio

Un municipio de la provincia de Valencia tenía 20 000 habitantes en 2015 y 23 000 en 2025. Suponemos un crecimiento exponencial $P(t) = 20\,000 \cdot e^{kt}$, con t en años desde 2015.

a. Calcula k con seis decimales.
b. Estima la población en 2035.
c. ¿En qué año superará los 30 000 habitantes?
d. ¿Qué porcentaje anual de crecimiento representa este modelo?

Ejercicio 14

Ejercicio 14 – El café que se enfría

En una cafetería de Sevilla sirven un café a 90 °C en una sala a 20 °C. Su temperatura, t minutos después, es $T(t) = 20 + 70e^{-0{,}08t}$.

a. Comprueba que $T(0) = 90$ y calcula la temperatura a los 10 minutos.
b. ¿Cuánto tarda en bajar a 40 °C, temperatura agradable para beberlo?

c. Calcula el límite de $T(t)$ cuando $t \to +\infty$ e interprétalo.
d. ¿Por qué el café pierde más grados en el primer minuto que en el minuto 20?

Ejercicio 15

Ejercicio 15 – El medicamento en la sangre

Un paciente recibe una dosis de 400 mg de un antibiótico. Su organismo elimina cada hora el 15 % de la cantidad presente. Llamamos $Q(t)$ a los miligramos que quedan en sangre t horas después. El médico necesita saber cuándo baja la cantidad de 50 mg, ya que por debajo de ese nivel el medicamento deja de ser eficaz y hay que administrar una nueva dosis.

t (h)	0	2	4	6	8
Q(t) (mg)	400	…	…	…	…

a. Justifica que $Q(t) = 400 \cdot 0{,}85^t$ y calcula $Q(4)$.
b. Calcula la vida media del antibiótico, es decir, el tiempo que tarda en quedar la mitad.
c. ¿Al cabo de cuántas horas completas la cantidad es inferior a 50 mg?
d. Completa la tabla y explica por qué la cantidad nunca llega a ser exactamente 0.
e. Si en lugar del 15 % se eliminara el 25 % por hora, ¿habría que dar la dosis antes o después? Razónalo sin calcular.

Ejercicio 16

Ejercicio 16 – Tres ofertas de un banco

Pablo quiere invertir 10 000 € durante 8 años y compara tres productos de su banco.

Oferta	Condiciones
A	3 % anual, interés compuesto con abono anual
B	2,9 % nominal anual, abono mensual
C	2,95 % anual, interés compuesto continuo: C = C₀·e^{0,0295t}

a. Calcula el capital final con cada oferta, redondeado a céntimos.
b. Calcula la tasa anual equivalente (TAE) de las ofertas B y C, es decir, el porcentaje de crecimiento real en un año.
c. ¿Qué oferta le conviene? Explica por qué la B, con más abonos al año, no es la mejor.
d. Demuestra que con la oferta C el capital se duplica en unos 23,5 años.

Ejercicio 17

Ejercicio 17 – Un vídeo que se hace viral

Un instituto de Bilbao sube a internet un vídeo de su grupo de teatro. El número de

visualizaciones se registra en la tabla. Se propone el modelo $V(t) = V_0 \cdot a^t$, con t en días.

Día	0	1	2	3
Visualizaciones	1 500	3 100	6 000	11 400

a. Calcula V_0 y a con los datos de los días 0 y 2.
b. ¿Cuántas visualizaciones predice el modelo para el día 3? Compáralo con el dato real y calcula el error relativo.
c. Según el modelo, ¿qué día se supera el millón de visualizaciones?
d. ¿Crees que el modelo exponencial seguirá siendo válido durante un mes? Justifícalo.

Ejercicio 18

Ejercicio 18 – La escala logarítmica en el laboratorio

En una práctica se miden dos magnitudes x e y y se sospecha que $y = c \cdot 10^{mx}$. Tomando logaritmos, $\log y = \log c + mx$: los puntos $(x, \log y)$ deben estar alineados.

x	0	1	2	3
y	3	4,755	7,536	11,944

a. Calcula $\log y$ para cada dato (con tres decimales).
b. Comprueba que $\log y$ aumenta lo mismo cada vez que x aumenta 1 y calcula m.
c. Calcula c y escribe el modelo.
d. Estima y para $x = 10$.

Ejercicio 19

Ejercicio 19 – La inflación y el carro de la compra

El Instituto Nacional de Estadística publica cada año el IPC. Supongamos que los precios suben un 2,5 % anual de forma constante. Un carro de la compra semanal cuesta hoy 80 €.

a. ¿Cuánto costará el mismo carro dentro de 5 años?
b. ¿Cuántos años tienen que pasar para que los precios suban un 50 %?
c. ¿Qué poder adquisitivo tendrán dentro de 10 años 1 000 € guardados en casa, medido en euros de hoy?
d. Una familia ahorra en una cuenta al 1,5 % anual. ¿Gana o pierde poder adquisitivo? Justifícalo con el factor anual.

Ejercicio 20

Ejercicio 20 – Desafío: ecuaciones con exponente variable

Estos ejercicios combinan todo lo aprendido en el tema. Resuelve con cuidado y

comprueba cada solución.

a. El sistema $\begin{cases} \log x + \log y = 3 \\ \log x - \log y = 1 \end{cases}$
b. La ecuación $e^{2x} - 5e^x + 6 = 0$.
c. La inecuación $2^x > 100$.
d. La ecuación $x^{\log x} = 100x$ (toma logaritmos decimales en los dos miembros).