Soluciones - Funciones exponenciales y logarítmicas

Curso: 1 Bachillerato Ciencias

Solución del ejercicio 1

a. Para f: $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{2}$, 1, 2, 4, 8. Para g: 4, 2, 1, $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{8}$.
b. Las dos tienen dominio $\mathbb{R}$ y recorrido $(0, +\infty)$, porque una potencia de base positiva nunca es nula ni negativa. Las dos pasan por $(0, 1)$, ya que $a^0 = 1$.
c. f es creciente porque su base $2 > 1$; g es decreciente porque su base $\frac{1}{2}$ está entre 0 y 1.
d. Como $\left(\frac{1}{2}\right)^x = 2^{-x}$, se cumple $g(x) = f(-x)$: las gráficas son simétricas respecto del eje Y.

Solución del ejercicio 2

a. Buscamos el exponente. Como $2^5 = 32$, $\log_2 32 = 5$. Como $3^{-4} = \frac{1}{3^4} = \frac{1}{81}$, $\log_3 \frac{1}{81} = -4$: el logaritmo de un número entre 0 y 1 con base mayor que 1 es negativo.
b. $5^{1/2} = \sqrt{5}$, así que $\log_5 \sqrt{5} = \frac{1}{2}$. Con base $0{,}5 = 2^{-1}$: $0{,}5^{-3} = 2^3 = 8$, luego $\log_{0{,}5} 8 = -3$.
c. $10^{-3} = 0{,}001$, así que $\log 0{,}001 = -3$. El logaritmo neperiano tiene base e, luego $\ln e^4 = 4$.
d. $\log_x 49 = 2$ significa $x^2 = 49$; como la base debe ser positiva y distinta de 1, $x = 7$. $\log_2 x = -3$ significa $x = 2^{-3} = \frac{1}{8}$.

Solución del ejercicio 3

a. Descomponemos en factores y aplicamos la propiedad del producto y de la potencia: $\log 12 = \log(2^2 \cdot 3) = 2\log 2 + \log 3 = 0{,}602 + 0{,}477 = 1{,}079$. Con la del cociente: $\log 1{,}5 = \log \frac{3}{2} = \log 3 - \log 2 = 0{,}477 - 0{,}301 = 0{,}176$.
b. $\log 72 = \log(2^3 \cdot 3^2) = 3 \cdot 0{,}301 + 2 \cdot 0{,}477 = 0{,}903 + 0{,}954 = 1{,}857$. Para el 5 usamos $5 = \frac{10}{2}$ y $\log 10 = 1$: $\log 5 = 1 - 0{,}301 = 0{,}699$.
c. La raíz es una potencia de exponente $\frac{1}{2}$ y $0{,}6 = \frac{2 \cdot 3}{10}$: $\log \sqrt{0{,}6} = \frac{1}{2}(\log 2 + \log 3 - 1) = \frac{1}{2}(-0{,}222) = -0{,}111$.
d. Primero convertimos los coeficientes en exponentes y después usamos producto y cociente: $\log x^2 + \log y - \log \sqrt{z} = \log \dfrac{x^2 y}{\sqrt{z}}$.

Solución del ejercicio 4

a. Aplicamos el cambio a base 10: $\log_2 10 = \dfrac{\log 10}{\log 2} = \dfrac{1}{0{,}30103} \approx 3{,}3219$. Tiene sentido: $2^3 = 8$ y $2^4 = 16$, así que el resultado está entre 3 y 4.

b. Con logaritmos neperianos: $\log_3 20 = \dfrac{\ln 20}{\ln 3} = \dfrac{2{,}9957}{1{,}0986} \approx 2{,}7268$, entre 2 y 3 porque $3^2 = 9 < 20 < 27 = 3^3$.

c. Escribimos $0{,}2 = \frac{1}{5} = 5^{-1}$, luego $\log_5 0{,}2 = -1$ de forma exacta, sin calculadora.

d. Usando el cambio de base con logaritmos neperianos en los dos factores: $\log_a b \cdot \log_b a = \dfrac{\ln b}{\ln a} \cdot \dfrac{\ln a}{\ln b} = 1$, ya que los factores se simplifican.

Solución del ejercicio 5

a. Escribimos 32 como potencia de 2: $2^{x+1} = 2^5$. Igualando exponentes, $x + 1 = 5$ y $x = 4$.

b. $\frac{1}{27} = 3^{-3}$, así que $3^{2x-1} = 3^{-3}$ y $2x - 1 = -3$, luego $x = -1$. Comprobación: $3^{-3} = \frac{1}{27}$.

c. Como $4^x = (2^x)^2$, llamamos $t = 2^x$ y queda $t^2 - 6t + 8 = 0$, con $t = 2$ o $t = 4$. Deshacemos el cambio: $2^x = 2$ da $x = 1$ y $2^x = 4$ da $x = 2$.

d. 12 no es potencia de 5, así que tomamos logaritmos: $x \ln 5 = \ln 12$, luego $x = \dfrac{\ln 12}{\ln 5} \approx 1{,}5440$.

Solución del ejercicio 6

a. $\log[x(x-3)] = \log 10 \Rightarrow x^2 - 3x - 10 = 0 \Rightarrow x = 5$ o $x = -2$. Se descarta $x = -2$ porque $\log(-2)$ no existe. Solución: $x = 5$.

b. $\log x^2 = \log(5x - 6) \Rightarrow x^2 - 5x + 6 = 0 \Rightarrow x = 2$ o $x = 3$. Comprobación: $5 \cdot 2 - 6 = 4 > 0$ y $5 \cdot 3 - 6 = 9 > 0$. Las dos son válidas.

c. $\log_2 \frac{x+1}{x-1} = 3 \Rightarrow \frac{x+1}{x-1} = 8 \Rightarrow x + 1 = 8x - 8 \Rightarrow x = \frac{9}{7}$. Como $\frac{9}{7} > 1$, los dos argumentos son positivos: la solución es válida.

Solución del ejercicio 7

a. Cada año el capital se multiplica por $1 + 0{,}03 = 1{,}03$.
$C(5) = 5\,000 \cdot 1{,}03^5 \approx 5\,796{,}37$ € y $C(10) = 5\,000 \cdot 1{,}03^{10} \approx 6\,719{,}58$ €.

b. Intereses: $6\,719{,}58 - 5\,000 = 1\,719{,}58$ €.

c. $5\,000 \cdot 1{,}03^t = 10\,000 \Rightarrow 1{,}03^t = 2 \Rightarrow t = \dfrac{\ln 2}{\ln 1{,}03} \approx 23{,}45$. Hacen falta 24 años completos.

d. No. Al plantear $C_0 \cdot 1{,}03^t = 2C_0$ el capital inicial se simplifica y queda $1{,}03^t = 2$: el tiempo solo depende del tipo de interés.

Solución del ejercicio 8

a. Sustituimos $t = 12$: $N(12) = 200 \cdot 2^{12/3} = 200 \cdot 2^4 = 200 \cdot 16 = 3\,200$ bacterias. En 12 horas hay 4 duplicaciones.
b. Planteamos $200 \cdot 2^{t/3} = 51\,200$. Dividiendo entre 200: $2^{t/3} = 256 = 2^8$. Igualando exponentes, $\frac{t}{3} = 8$ y $t = 24$ horas.
c. En una hora la población se multiplica por $2^{1/3} = \sqrt[3]{2} \approx 1{,}26$, es decir, crece alrededor de un 26 % por hora. Comprobación: $1{,}26^3 \approx 2$.
d. Como $2 = e^{\ln 2}$, $2^{t/3} = e^{t \ln 2/3}$. Así $N(t) = 200 \cdot e^{kt}$ con $k = \dfrac{\ln 2}{3} \approx 0{,}231$.

Solución del ejercicio 9

a. $11\,460 = 2 \cdot 5\,730$: queda $0{,}5^2 = 0{,}25$, la cuarta parte. Para 2 000 años: $0{,}5^{2\,000/5\,730} \approx 0{,}785$, es decir, un 78,5 %.
b. $0{,}5^{t/5\,730} = 0{,}3 \Rightarrow \frac{t}{5\,730} = \frac{\ln 0{,}3}{\ln 0{,}5} \approx 1{,}737 \Rightarrow t \approx 9\,953$ años, unos 10 000 años.
c. Tras 70 millones de años habrían pasado más de 12 000 periodos y quedaría una fracción $0{,}5^{12\,000}$, imposible de medir. Para esas edades se usan otros isótopos con periodos mucho mayores.

Solución del ejercicio 10

a. De la definición, $A = A_0 \cdot 10^M$. Por tanto, $\frac{A_2}{A_1} = \frac{10^6 A_0}{10^4 A_0} = 10^{6-4} = 10^2 = 100$: la amplitud del segundo es 100 veces mayor.
b. De la segunda fórmula, $E = 10^{1{,}5M + 4{,}8}$. Entonces $\frac{E_2}{E_1} = \frac{10^{1{,}5 \cdot 6 + 4{,}8}}{10^{1{,}5 \cdot 4 + 4{,}8}} = 10^{1{,}5 \cdot 2} = 10^3 = 1\,000$: libera mil veces más energía.
c. Por la propiedad del producto: $\log \frac{10A}{A_0} = \log 10 + \log \frac{A}{A_0} = 1 + M$. La magnitud aumenta exactamente 1 unidad.
d. $\log E = 1{,}5 \cdot 5 + 4{,}8 = 12{,}3$, luego $E = 10^{12{,}3} \approx 2{,}0 \cdot 10^{12}$ julios.

Solución del ejercicio 11

a. Conversación: $\frac{I}{I_0} = \frac{10^{-6}}{10^{-12}} = 10^6$, luego $L = 10 \log 10^6 = 60$ dB. Calle: $\frac{10^{-5}}{10^{-12}} = 10^7$, luego $L = 70$ dB. Multiplicar la intensidad por 10 suma 10 dB.
b. Despejamos: $100 = 10 \log \frac{I}{10^{-12}}$ implica $\log \frac{I}{10^{-12}} = 10$, es decir, $\frac{I}{10^{-12}} = 10^{10}$. Por

tanto, $I = 10^{-2}$ W/m².

c. $10\log\frac{2I}{I_0} = 10\log 2 + 10\log\frac{I}{I_0}$: el nivel aumenta $10\log 2 \approx 3{,}01$ dB, no se duplica.

d. A 85 dB, $I = 10^{8,5}\cdot 10^{-12} = 10^{-3,5} \approx 3{,}16\cdot 10^{-4}$ W/m². Cociente: $\frac{10^{-2}}{10^{-3,5}} = 10^{1,5} \approx 31{,}6$. La música del concierto es unas 32 veces más intensa que el límite recomendado.

Solución del ejercicio 12

a. Aplicamos la definición: $\mathrm{pH} = -\log 0{,}005 \approx -(-2{,}30) = 2{,}30$. Como es mucho menor que 7, el zumo de limón es muy ácido.

b. Despejamos la concentración: $\log[\mathrm{H}^+] = -8{,}2$, luego $[\mathrm{H}^+] = 10^{-8,2} \approx 6{,}31\cdot 10^{-9}$ mol/L. Con pH mayor que 7, el agua de mar es ligeramente básica.

c. Pasamos cada pH a concentración: 10^{-3} y 10^{-5} mol/L. El cociente es $\frac{10^{-3}}{10^{-5}} = 10^2 = 100$: el refresco tiene 100 veces más concentración de iones, aunque su pH solo difiere en 2 unidades.

d. $-\log\frac{c}{10} = -(\log c - 1) = -\log c + 1$: el pH aumenta en 1 unidad, es decir, la disolución se vuelve menos ácida.

Solución del ejercicio 13

a. $20\,000e^{10k} = 23\,000 \Rightarrow e^{10k} = 1{,}15 \Rightarrow k = \dfrac{\ln 1{,}15}{10} \approx 0{,}013976$.

b. $P(20) = 20\,000e^{20k} = 20\,000\cdot 1{,}15^2 = 26\,450$ habitantes.

c. $e^{kt} = 1{,}5 \Rightarrow t = \dfrac{\ln 1{,}5}{k} \approx 29{,}01$ años: a principios de 2044 se superan, así que en 2044.

d. Cada año la población se multiplica por $e^k \approx 1{,}0141$: crece alrededor de un 1,41 % anual.

Solución del ejercicio 14

a. $T(0) = 20 + 70e^0 = 90$ °C. $T(10) = 20 + 70e^{-0,8} \approx 20 + 70\cdot 0{,}4493 = 51{,}45$ °C.

b. $20 + 70e^{-0,08t} = 40 \Rightarrow e^{-0,08t} = \frac{2}{7} \Rightarrow t = \dfrac{\ln 3{,}5}{0{,}08} \approx 15{,}66$ minutos.

c. $e^{-0,08t} \to 0$, así que $T \to 20$ °C: el café acaba a la temperatura de la sala.

d. La diferencia con la sala se multiplica cada minuto por $e^{-0,08} \approx 0{,}923$: pierde un 7,7 % de una diferencia que al principio es grande y luego pequeña.

Solución del ejercicio 15

a. Si se elimina el 15 %, queda el 85 %: cada hora se multiplica por $0{,}85$. $Q(4) = 400 \cdot 0{,}85^4 \approx 208{,}80$ mg.
b. $0{,}85^t = 0{,}5 \Rightarrow t = \dfrac{\ln 0{,}5}{\ln 0{,}85} \approx 4{,}27$ horas.
c. $400 \cdot 0{,}85^t$ (el sentido cambia al dividir por $\ln 0{,}85$). A las 13 horas.
d. $Q(0) = 400$, $Q(2) = 289$, $Q(6) \approx 150{,}86$, $Q(8) \approx 109{,}00$. Como $0{,}85^t > 0$ para todo t, la cantidad es siempre positiva, aunque tienda a 0.
e. Antes: con un factor $0{,}75$ la cantidad baja más deprisa y alcanza los 50 mg en menos tiempo.

Solución del ejercicio 16

a. A: $10\,000 \cdot 1{,}03^8 \approx 12\,667{,}70$ €. B: $10\,000\left(1 + \frac{0{,}029}{12}\right)^{96} \approx 12\,607{,}67$ €. C: $10\,000e^{0{,}0295 \cdot 8} \approx 12\,661{,}74$ €.
b. B: $\left(1 + \frac{0{,}029}{12}\right)^{12} - 1 \approx 0{,}02939$, TAE 2,94 %. C: $e^{0{,}0295} - 1 \approx 0{,}02994$, TAE 2,99 %.
c. Le conviene la A (TAE 3 %). Abonar los intereses más veces ayuda, pero no compensa que el tipo nominal de la B sea una décima menor.
d. $e^{0{,}0295t} = 2 \Rightarrow t = \dfrac{\ln 2}{0{,}0295} \approx 23{,}5$ años.

Solución del ejercicio 17

a. $V_0 = V(0) = 1\,500$. $1\,500a^2 = 6\,000 \Rightarrow a^2 = 4 \Rightarrow a = 2$: las visualizaciones se duplican cada día.
b. $V(3) = 1\,500 \cdot 2^3 = 12\,000$. Error relativo: $\frac{12\,000 - 11\,400}{11\,400} \approx 0{,}053$, un 5,3 %.
c. $1\,500 \cdot 2^t > 10^6 \Rightarrow t > \log_2 \frac{10^6}{1\,500} = \dfrac{\ln 666{,}67}{\ln 2} \approx 9{,}38$. Se supera durante el día 10.
d. No: a los 30 días el modelo daría $1\,500 \cdot 2^{30} \approx 1{,}6 \cdot 10^{12}$ visualizaciones, más que personas en el planeta multiplicadas por cien. El crecimiento real se frena.

Solución del ejercicio 18

a. Con la calculadora: $\log 3 = 0{,}477$; $\log 4{,}755 \approx 0{,}677$; $\log 7{,}536 \approx 0{,}877$; $\log 11{,}944 \approx 1{,}077$.
b. Las diferencias entre valores consecutivos son $0{,}677 - 0{,}477 = 0{,}2$, $0{,}877 - 0{,}677 = 0{,}2$ y $1{,}077 - 0{,}877 = 0{,}2$. Como son constantes, los puntos $(x, \log y)$ están alineados y la pendiente es $m = 0{,}2$.
c. La ordenada en el origen es $\log c = \log y(0) = 0{,}477$, luego $c = 10^{0{,}477} = 3$. El modelo es $y = 3 \cdot 10^{0{,}2x}$.

d. Para $x = 10$: $y = 3 \cdot 10^{0{,}2 \cdot 10} = 3 \cdot 10^2 = 300$.

Solución del ejercicio 19

a. $80 \cdot 1{,}025^5 \approx 90{,}51$ €.

b. $1{,}025^t = 1{,}5 \Rightarrow t = \dfrac{\ln 1{,}5}{\ln 1{,}025} \approx 16{,}42$: hacen falta 17 años.

c. $\dfrac{1\,000}{1{,}025^{10}} \approx 781{,}20$ € de hoy: se pierde casi la cuarta parte.

d. Cada año su dinero se multiplica por $\frac{1{,}015}{1{,}025} \approx 0{,}990$: pierde aproximadamente un 1 % anual de poder adquisitivo.

Solución del ejercicio 20

a. Sumando: $2 \log x = 4 \Rightarrow \log x = 2 \Rightarrow x = 100$. Restando: $2 \log y = 2 \Rightarrow y = 10$. Comprobación: $\log 1\,000 = 3$ y $\log 10 = 1$.

b. Con $t = e^x$: $t^2 - 5t + 6 = 0$, $t = 2$ o $t = 3$. Entonces $x = \ln 2 \approx 0{,}693$ o $x = \ln 3 \approx 1{,}099$.

c. Como 2^x es creciente: $x > \log_2 100 = \dfrac{\ln 100}{\ln 2} \approx 6{,}644$. Solución: $(6{,}644; +\infty)$.

d. $\log x \cdot \log x = \log 100 + \log x$. Con $u = \log x$: $u^2 - u - 2 = 0$, $u = 2$ o $u = -1$. Luego $x = 100$ o $x = 0{,}1$. Comprobación: $100^2 = 10\,000 = 100 \cdot 100$ y $0{,}1^{-1} = 10 = 100 \cdot 0{,}1$.