Soluciones del examen - Límites y continuidad

Curso: 1 Bachillerato Ciencias · Duración: 55 minutos · /20

Solución del ejercicio 1 (4 puntos)

a. Sale $\frac{0}{0}$: factorizamos numerador y denominador, $\frac{(x-2)(x+2)}{(x-2)(x+1)} = \frac{x+2}{x+1}$, que tiende a $\frac{4}{3}$.

b. Indeterminación $\frac{\infty}{\infty}$ con el mismo grado en numerador y denominador: el límite es el cociente de los coeficientes principales, $\frac{4}{2} = 2$.

c. Indeterminación 1^∞. Escribimos el exponente como $3x = \frac{x}{2} \cdot 6$: $\left[\left(1+\frac{2}{x}\right)^{x/2}\right]^6 \to e^6$. Se usa el límite $\lim_{u\to\infty}\left(1+\frac{1}{u}\right)^u = e$ con $u = \frac{x}{2}$.

d. Indeterminación $\infty - \infty$. Multiplicando por el conjugado: $\frac{(x^2+3x)-x^2}{\sqrt{x^2+3x}+x} = \frac{3x}{\sqrt{x^2+3x}+x}$. Dividiendo entre x: $\frac{3}{\sqrt{1+3/x}+1} \to \frac{3}{1+1} = \frac{3}{2}$.

Solución del ejercicio 2 (4 puntos)

a. El denominador se anula en $x=2$ y el numerador vale $8-6=2\neq 0$. Por la izquierda el denominador es negativo: $\lim_{x\to 2^-} f = -\infty$; por la derecha es positivo: $\lim_{x\to 2^+} f = +\infty$. Asíntota vertical $x=2$.

b. El grado del numerador (2) es mayor que el del denominador (1): $\lim_{x\to\pm\infty} f = \pm\infty$, así que no hay asíntota horizontal.

c. Como la diferencia de grados es 1, hay asíntota oblicua. Dividiendo, $2x^2-3x = (x-2)(2x+1)+2$, luego $f(x) = 2x+1+\frac{2}{x-2}$. El último término tiende a 0, así que la asíntota oblicua es $y = 2x+1$.

Solución del ejercicio 3 (4 puntos)

a. Por la izquierda de 2 se usa el primer tramo: $\lim_{x\to 2^-} f = 2a-1$. Por la derecha (y en el propio punto) se usa el segundo: $\lim_{x\to 2^+} f = 4-a = f(2)$.

b. Para que f sea continua en $x=2$, los dos límites laterales deben coincidir con $f(2)$: $2a-1 = 4-a$, luego $3a=5$ y $a=\frac{5}{3}$. Comprobación: $2\cdot\frac{5}{3}-1 = \frac{7}{3}$ y $4-\frac{5}{3} = \frac{7}{3}$.

c. Con $a = \frac{5}{3}$: $f(0) = \frac{5}{3} \cdot 0 - 1 = -1$, usando el primer tramo, y $f(3) = 9 - \frac{5}{3} = \frac{22}{3} \approx 7{,}33$, usando el segundo.

Solución del ejercicio 4 (4 puntos)

a. Es un polinomio, continuo en $\mathbb{R}$. $f(0) = 1$, $f(1) = -1$, $f(2) = 8 - 6 + 1 = 3$, $f(-1) = -1 + 3 + 1 = 3$, $f(-2) = -8 + 6 + 1 = -1$.
b. $f(0) = 1 > 0$ y $f(1) = -1 < 0$: por Bolzano hay $c \in (0, 1)$ con $f(c) = 0$. El teorema exige continuidad en $[0, 1]$ y signos opuestos en los extremos.
c. En $[1, 2]$: $f(1) = -1 < 0$ y $f(2) = 3 > 0$. En $[-2, -1]$: $f(-2) = -1 < 0$ y $f(-1) = 3 > 0$. Hay una raíz en cada intervalo. Con la anterior son tres raíces, que es el máximo para un polinomio de grado 3.

Solución del ejercicio 5 (4 puntos)

a. Sustituimos: $C(3) = \frac{24}{6} = 4$ mg/L y $C(12) = \frac{96}{15} = 6{,}4$ mg/L.
b. Numerador y denominador tienen grado 1: $\lim_{t \to \infty} \frac{8t}{t+3} = 8$. La asíntota horizontal es $y = 8$. A largo plazo la concentración se estabiliza cerca de 8 mg/L.
c. Dividiendo, $C(t) = 8 - \frac{24}{t+3}$. Como $\frac{24}{t+3} > 0$ para todo $t \geq 0$, la concentración es siempre menor que 8; y como ese término disminuye al crecer t, la concentración aumenta acercándose a 8 sin alcanzarlo.
d. Resolvemos $\frac{8t}{t+3} = 6$: $8t = 6t + 18$, luego $t = 9$ horas. Comprobación: $C(9) = \frac{72}{12} = 6$ mg/L.