Apuntes - Límites y continuidad

Curso: 1 Bachillerato Ciencias

En este tema aprenderás: idea de límite y límites laterales, cálculo de límites, asíntotas y continuidad. Cada idea va en un cuadro de color, con ejemplos resueltos paso a paso.

Actividad de introducción: la descarga que nunca llega al 100 %

Estás descargando una película y la barra de progreso avanza así: 50 % tras el primer segundo, 75 % tras el segundo, 87,5 % tras el tercero, 93,75 % tras el cuarto... Cada segundo se descarga la mitad de lo que queda. ¿Llegará alguna vez al 100 %? Matemáticamente no, pero se acerca tanto como quieras: a los 10 segundos ya está al 99,9 %. Decimos que el progreso **tiende** a 100 % cuando el tiempo tiende a infinito, y lo escribimos como un límite. El límite no es el valor que la función toma, sino el valor al que se aproxima. En este tema aprenderás a calcular límites cuando x se acerca a un número o a infinito, a detectar y resolver las indeterminaciones, a dibujar asíntotas y a decidir cuándo una función es continua, es decir, cuando su gráfica se puede dibujar sin levantar el lápiz.

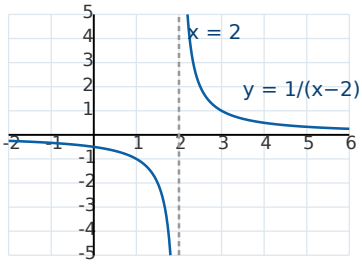
Idea de límite y límites laterales

Propiedad

$\lim_{x\to a} f(x) = L$ significa que $f(x)$ se acerca a L cuando x se acerca a a, sin importar lo que valga $f(a)$. Los **límites laterales** $\lim_{x\to a^-} f(x)$ y $\lim_{x\to a^+} f(x)$ estudian cada lado; el límite existe si y solo si ambos existen y coinciden. Por ejemplo, $\lim_{x\to 0} \frac{|x|}{x}$ no existe, porque por la derecha vale 1 y por la izquierda -1.

Propiedad

También hay límites infinitos y límites en el infinito. $\lim_{x\to 2^+} \frac{1}{x-2} = +\infty$ y $\lim_{x\to 2^-} \frac{1}{x-2} = -\infty$, así que $x = 2$ es una **asíntota vertical**.



Cálculo de límites

Propiedad: cálculo de límites

Con funciones continuas basta sustituir: $\lim_{x\to 2}(x^2+3x-1)=9$. Si sale una **indeterminación** ($\frac{0}{0}$, $\frac{\infty}{\infty}$, $\infty-\infty$, 1^∞, $0\cdot\infty$) hay que transformar la expresión:

- $\frac{0}{0}$ **en cocientes de polinomios:** se factoriza y se simplifica. $\lim_{x\to 3}\frac{x^2-9}{x-3}=\lim(x+3)=6$.
- $\frac{0}{0}$ **con raíces:** se multiplica por el conjugado. $\lim_{x\to 4}\frac{\sqrt{x}-2}{x-4}=\lim\frac{x-4}{(x-4)(\sqrt{x}+2)}=\frac{1}{4}$.
- $\frac{\infty}{\infty}$ **en el infinito:** se comparan los grados. Si el grado del numerador es menor, el límite es 0; si son iguales, es el cociente de los coeficientes directores; si es mayor, es $\pm\infty$. $\lim_{x\to\infty}\frac{3x^2-x}{2x^2+5}=\frac{3}{2}$.
- $\infty-\infty$ **con raíces:** se multiplica y divide por el conjugado. $\lim_{x\to\infty}\left(\sqrt{x^2+x}-x\right)=\lim\frac{x}{\sqrt{x^2+x}+x}=\frac{1}{2}$.
- 1^∞**:** se usa $\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{k}{x}\right)^x=e^k$. Así, $\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{3}{x}\right)^{2x}=e^6$.

Un límite notable es $\lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{sen} x}{x}=1$ (con x en radianes).

Cómo se hace: resolver un límite con indeterminación

1. Sustituye el valor al que tiende x para ver si hay indeterminación.
2. En $\frac{0}{0}$ con polinomios, factoriza y simplifica; con raíces, multiplica por el conjugado.
3. En $\frac{\infty}{\infty}$ con polinomios, divide entre la potencia mayor de x o compara grados.
4. Si sale $\frac{k}{0}$, estudia los límites laterales para ver si es $+\infty$ o $-\infty$.

Ejemplo 1: indeterminación 0/0

Calcula $\lim_{x\to 2}\frac{x^2-4}{x-2}$.

Al sustituir sale $\frac{0}{0}$. Factorizamos: $\frac{(x-2)(x+2)}{x-2}=x+2$, y el límite vale 4.

Ejemplo 2: límite en el infinito

Calcula $\lim_{x\to+\infty}\frac{3x^2+1}{x^2-5}$.

Numerador y denominador tienen el mismo grado: el límite es el cociente de los coeficientes principales, 3.

Asíntotas

Definición: asíntota vertical

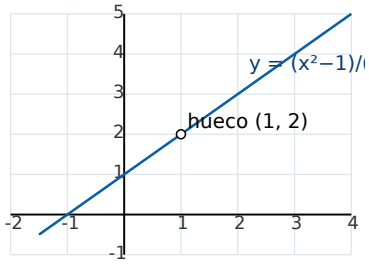
La recta $x = a$ es **asíntota vertical** si algún límite lateral en a es infinito. La recta $y = L$ es **horizontal** si $\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = L$. La recta $y = mx + n$ es **oblicua** si $m = \lim \frac{f(x)}{x} \neq 0$ y $n = \lim(f(x) - mx)$ son finitos. Para $f(x) = \frac{x^2+1}{x-1}$: vertical $x = 1$; $m = 1$, $n = \lim \frac{x^2+1-x^2+x}{x-1} = 1$, oblicua $y = x + 1$.

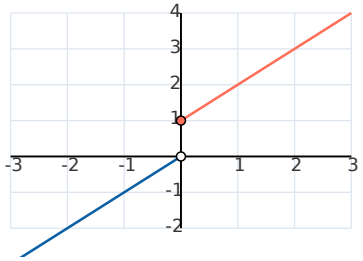
Continuidad

Propiedad: continuidad

f es **continua en** a si existe $f(a)$, existe $\lim_{x\to a} f(x)$ y $\lim_{x\to a} f(x) = f(a)$. Las funciones elementales son continuas en sus dominios. Los tipos de **discontinuidad** son:

- **Evitable:** el límite existe y es finito pero no coincide con $f(a)$ (o $f(a)$ no existe). $f(x) = \frac{x^2-1}{x-1}$ tiene un hueco en $(1, 2)$.
- **De salto:** los límites laterales son finitos y distintos.
- **Esencial (asintótica):** algún límite lateral es infinito.





Ejemplo 3

Para que $f(x) = \begin{cases} 2x + a & x \leq 1 \\ x^2 + 3 & x > 1 \end{cases}$ sea continua en $x = 1$ se exige $2 + a = 4$, es decir, $a = 2$.

Teorema de Bolzano

Si f es continua en $[a, b]$ y $f(a)$ y $f(b)$ tienen signos opuestos, existe $c \in (a, b)$ con $f(c) = 0$. Para $f(x) = x^3 + x - 1$: $f(0) = -1$ y $f(1) = 1 > 0$, luego hay una raíz en $(0, 1)$.

¡Atención! Errores frecuentes

- Escribir $\frac{0}{0} = 0$ o $\frac{\infty}{\infty} = 1$: son indeterminaciones y hay que resolverlas.
- Simplificar $\infty - \infty = 0$.
- Olvidar comprobar los límites laterales en las funciones a trozos.
- Aplicar Bolzano sin comprobar que la función es continua en todo el intervalo cerrado.

Idea intuitiva y límites laterales

Definición: límite y límites laterales

Decimos que $\lim_{x \to a} f(x) = L$ cuando los valores $f(x)$ se acercan tanto como queramos a L al acercarse x a a (sin tomar el valor $x = a$). El **límite lateral por la izquierda** $\lim_{x \to a^-} f(x)$ considera valores x y el **límite lateral por la derecha** $\lim_{x \to a^+} f(x)$ considera valores $x > a$. El límite existe si y solo si los dos límites laterales existen y son iguales.

Ejemplo 4

Calcula $\lim_{x \to 0} \frac{|x|}{x}$**.**

Para $x > 0$, $|x| = x$ y el cociente vale 1: el límite por la derecha es 1. Para x, $|x| = -x$ y el cociente vale -1: el límite por la izquierda es -1. Como los límites laterales son distintos, el límite no existe.

Resolver indeterminaciones

Regla: estrategia según el tipo de indeterminación

Tipo $\frac{0}{0}$ (en un número): factoriza numerador y denominador y simplifica, o multiplica por el conjugado si hay raíces. **Tipo** $\frac{\infty}{\infty}$ (en el infinito): divide numerador y denominador entre la mayor potencia de x, o compara grados. **Tipo** $\infty - \infty$: si hay raíces, multiplica y divide por el conjugado; si hay fracciones, réstalas con denominador común. **Tipo** 1^∞: usa $\lim f^g = e^{\lim g \cdot (f-1)}$. **Tipo** $\frac{k}{0}$ con $k \neq 0$: no es indeterminación, es una asíntota vertical y se estudian los signos de los límites laterales.

Ejemplo 5

Calcula $\lim_{x \to \infty} \left(\frac{2x+1}{2x-1} \right)^x$**.**

La base tiende a 1 y el exponente a ∞, así que es del tipo 1^∞. Usamos $e^{\lim x\left(\frac{2x+1}{2x-1}-1\right)}$. Calculamos $\frac{2x+1}{2x-1}-1=\frac{2}{2x-1}$, de modo que $x\cdot\frac{2}{2x-1}\to 1$. El límite es $e^1=e$.

Ejemplo 6

Calcula $\lim_{x\to 1}\left(\frac{1}{x-1}-\frac{2}{x^2-1}\right)$.

Al sustituir aparece $\infty-\infty$. Con denominador común $x^2-1=(x-1)(x+1)$: $\frac{(x+1)-2}{(x-1)(x+1)}=\frac{x-1}{(x-1)(x+1)}=\frac{1}{x+1}$. Su límite en $x=1$ es $\frac{1}{2}$.

Asíntotas verticales, horizontales y oblicuas

Propiedad: tipos de asíntotas

Una **asíntota vertical** $x=a$ aparece cuando algún límite lateral en a es $\pm\infty$. Una **asíntota horizontal** $y=L$ aparece cuando $\lim_{x\to\pm\infty}f(x)=L$. Una **asíntota oblicua** $y=mx+n$ aparece cuando $\lim_{x\to\pm\infty}\frac{f(x)}{x}=m\neq 0$ finito y $n=\lim_{x\to\pm\infty}(f(x)-mx)$ es finito. En una función racional, hay oblicua cuando el grado del numerador supera en una unidad al del denominador, y se obtiene dividiendo. Por cada lado, una función no puede tener a la vez horizontal y oblicua.

Continuidad y tipos de discontinuidad

Definición: discontinuidad evitable, de salto y asintótica

Una función f es **continua** en a si $f(a)$ existe, existe $\lim_{x\to a}f(x)$ y son iguales. Cuando falla, la discontinuidad es: **evitable** si el límite existe y es finito pero no coincide con $f(a)$ (o $f(a)$ no existe); de **salto finito** si los límites laterales son finitos y distintos; **de salto infinito** o asintótica si algún límite lateral es infinito. Las funciones elementales (polinomios, exponenciales, senos, cosenos…) son continuas en todo su dominio, y las racionales lo son salvo donde se anula el denominador.

Cómo se hace: estudiar la continuidad de una función a trozos

1. Comprueba que cada trozo es continuo en su intervalo (casi siempre lo es).
2. En cada punto de unión a, calcula los límites laterales y $f(a)$.
3. Si son iguales, es continua en a; si no, clasifica la discontinuidad.
4. Si hay parámetros, iguala los límites laterales para obtener ecuaciones y resuélvelas.

El teorema de Bolzano

Teorema de Bolzano

Si f es continua en $[a,b]$ y $f(a)$ y $f(b)$ tienen signos distintos, existe al menos un $c \in (a,b)$ con $f(c)=0$. Sirve para demostrar que una ecuación tiene solución sin resolverla, y con bisección se localiza la raíz con la precisión que se quiera: se evalúa en el punto medio y se conserva la mitad donde el signo cambia.

Ejemplo 7

Demuestra que $x^3+x-1=0$ tiene una raíz en $(0,1)$ y localiza una cifra decimal.

Sea $f(x)=x^3+x-1$, continua. $f(0)=-1$ y $f(1)=1>0$: por Bolzano hay una raíz en $(0,1)$. Probamos $f(0{,}5)=-0{,}375$, luego está en $(0{,}5,1)$. Con $f(0{,}7)=0{,}043>0$ y $f(0{,}6)=-0{,}184$ la raíz está en $(0{,}6;0{,}7)$. Es aproximadamente $0{,}68$.

Cómo se hace: localizar una raíz por bisección

1. Comprueba que f es continua en $[a,b]$ y que $f(a)\cdot f(b)<0$.
2. Calcula el punto medio $m=\frac{a+b}{2}$ y el signo de $f(m)$.
3. Si $f(a)$ y $f(m)$ tienen signos distintos, la raíz está en $[a,m]$; en caso contrario, está en $[m,b]$.
4. Repite el proceso. Después de cada paso la longitud del intervalo se reduce a la mitad, de modo que tras diez pasos la raíz queda acotada en un intervalo mil veces más pequeño que el inicial.

¡Atención! errores frecuentes con los límites

Sustituir sin cuidado y escribir que $\frac{0}{0}=0$ o que $\frac{0}{0}=1$: es una indeterminación, no un número. Escribir que $\lim \frac{k}{0}=\infty$ sin comprobar los signos de los límites laterales. Dar por buena una raíz de Bolzano en el borde del intervalo sin comprobar la continuidad. Y suponer que si $f(a)$ existe entonces el límite coincide con él: eso solo ocurre si la función es continua.

¿Sabías que? El rigor de Cauchy y Weierstrass

Newton y Leibniz usaban «infinitésimos» sin una definición clara, y el cálculo funcionaba, pero muchos matemáticos desconfiaban de él. En el siglo XIX, Cauchy y Weierstrass formalizaron la idea de límite con la definición «épsilon-delta», y Bolzano demostró su famoso teorema en 1817. Gracias a ese rigor el análisis matemático dejó de ser una colección de trucos y se convirtió en la base de la ingeniería y de la física modernas.

El consejo de Otto

Sustituye primero: solo si sale una indeterminación necesitas factorizar, usar el conjugado o comparar grados.