Ejercicios - Límites y continuidad

Curso: 1 Bachillerato Ciencias · 20

Se debe mostrar el desarrollo de cada ejercicio.

Ejercicio 1

Ejercicio 1 – Acercarse a un valor

Queremos averiguar qué le ocurre a $f(x) = \dfrac{x^2 - 1}{x - 1}$ cuando x se acerca a 1, aunque $f(1)$ no exista.

x	0,9	0,99	1,01	1,1
f(x)	1,9	1,99	2,01	2,1

a. Completa mentalmente la tabla de valores y observa hacia qué número tienden las imágenes.
b. Simplifica la expresión y comprueba el resultado con el límite.
c. ¿Existe $f(1)$? ¿Qué diferencia hay entre $f(1)$ y $\lim_{x \to 1} f(x)$?

Ejercicio 2

Ejercicio 2 – Límites laterales

Sea la función *f(x)=\begin{cases}2x-1&\text{si }*x. Para que exista el límite en un punto, los límites laterales deben coincidir.

a. Calcula $\lim_{x \to 2^-} f(x)$.
b. Calcula $\lim_{x \to 2^+} f(x)$ y $f(2)$.
c. ¿Existe $\lim_{x \to 2} f(x)$? ¿Es continua en $x = 2$?
d. Calcula $\lim_{x \to 0} f(x)$ y $\lim_{x \to 3} f(x)$.

Ejercicio 3

Ejercicio 3 – Límites que se calculan sustituyendo

Cuando la función es continua en el punto y no aparece ninguna indeterminación, basta con sustituir. Calcula:

a. $\lim_{x \to 3} \dfrac{2x^2 - x}{x + 1}$
b. $\lim_{x \to -1} \dfrac{x^3 - 2x}{x^2 + 5}$
c. $\lim_{x \to 3} \left(\sqrt{x + 13} - x \right)$

d. $\lim_{x\to 0} \dfrac{e^x + 2}{\cos x}$

Ejercicio 4

Ejercicio 4 – Indeterminación 0/0

Si al sustituir aparece $\frac{0}{0}$, hay que transformar la expresión: factorizar, simplificar o multiplicar por el conjugado.

a. $\lim_{x\to 3} \dfrac{x^2 - 9}{x - 3}$

b. $\lim_{x\to 2} \dfrac{x^2 - 5x + 6}{x^2 - 4}$

c. $\lim_{x\to 0} \dfrac{\sqrt{x+4} - 2}{x}$

Ejercicio 5

Ejercicio 5 – Límites en el infinito

Para un cociente de polinomios, compara los grados: si el del numerador es menor, el límite es 0; si son iguales, el cociente de los coeficientes principales; si es mayor, $\pm\infty$.

a. $\lim_{x\to\infty} \dfrac{3x^2 + x}{2x^2 - 5}$

b. $\lim_{x\to\infty} \dfrac{x^3 + 1}{x^2 + 4}$

c. $\lim_{x\to\infty} \dfrac{5x + 2}{x^3 - 1}$

d. $\lim_{x\to-\infty} \dfrac{x^3 + 1}{x^2 + 4}$

Ejercicio 6

Ejercicio 6 – Indeterminación $\infty - \infty$

Cuando aparece la diferencia de dos infinitos con raíces, se multiplica y divide por el conjugado.

a. $\lim_{x\to\infty} \left(\sqrt{x^2 + x} - x\right)$

b. $\lim_{x\to\infty} \left(x - \sqrt{x^2 - 4x}\right)$

c. $\lim_{x\to\infty} \left(\dfrac{x^2}{x+1} - x\right)$

Ejercicio 7

Ejercicio 7 – Indeterminación 1^∞ y el número e

El número e aparece en $\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x}=e$. En general, si $f\to\infty$, $\left(1+\frac{k}{f}\right)^{f}\to e^{k}$.

a. $\lim_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^{x}$

b. $\lim_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{3}{x}\right)^{2x}$

c. $\lim_{x\to\infty}\left(\dfrac{x+2}{x-1}\right)^{x}$

Ejercicio 8

Ejercicio 8 – Asíntotas de una racional

Estudia las asíntotas de $f(x)=\dfrac{2x^{2}+1}{x-1}$.

a. Calcula el dominio y la asíntota vertical, con los límites laterales.
b. ¿Tiene asíntota horizontal? Calcula $\lim_{x\to\pm\infty}f(x)$.
c. Divide para obtener la asíntota oblicua $y=mx+n$.
d. Calcula $m=\lim\frac{f(x)}{x}$ y $n=\lim(f(x)-mx)$ para comprobarlo.

Ejercicio 9

Ejercicio 9 – Dos asíntotas verticales

Sea $f(x)=\dfrac{3x+1}{x^{2}-4}$.

a. Halla el dominio y las asíntotas verticales.
b. Estudia el signo de los límites laterales en cada asíntota.
c. Calcula la asíntota horizontal.
d. Halla los puntos de corte con los ejes.

Ejercicio 10

Ejercicio 10 – Continuidad en un punto

Una función es continua en $x=a$ si existe $f(a)$, existe $\lim_{x\to a}f(x)$ y ambos coinciden.

Sea 

a. Calcula $\lim_{x\to 2}f(x)$.

b. ¿Qué valor de k hace continua la función en $x = 2$?
c. ¿Qué tipo de discontinuidad tendría si $k = 0$?

Ejercicio 11

Ejercicio 11 – Función continua con parámetros

Se considera $f(x) = \{x + 1 \quad \text{si } x2$

a. Impón la continuidad en $x = 0$ para obtener b.
b. Impón la continuidad en $x = 2$ para obtener a.
c. Escribe la función resultante y calcula $f(1)$.
d. Calcula $\lim_{x \to -\infty} f(x)$ y $\lim_{x \to +\infty} f(x)$.

Ejercicio 12

Ejercicio 12 – Clasificar discontinuidades

Clasifica la discontinuidad de cada función en el punto indicado como evitable, de salto finito o de salto infinito (asintótica).

a. $f(x) = \dfrac{1}{x - 2}$ en $x = 2$
b. $g(x) = \dfrac{x^2 - 1}{x - 1}$ en $x = 1$
c. $h(x) = \dfrac{|x|}{x}$ en $x = 0$
d. $k(x) = \dfrac{x}{x^2 + 1}$ en $x = 0$

Ejercicio 13

Ejercicio 13 – Tarifa de un parking con salto

Un aparcamiento cobra 1,50 € por la primera hora (o fracción) y 1 € por cada hora o fracción siguiente. Si t es el tiempo de estancia en horas, el precio $C(t)$ es: $1{,}5$ si 0; $2{,}5$ si 1; $3{,}5$ si 2; y así sucesivamente.

a. Calcula $\lim_{t \to 1^-} C(t)$ y $\lim_{t \to 1^+} C(t)$.
b. ¿Es continua C en $t = 1$? ¿Y en $t = 1{,}5$?
c. ¿Cuánto paga un cliente que está 2 horas y 5 minutos?
d. Explica qué significa en la práctica el salto en $t = 1$.

Ejercicio 14

Ejercicio 14 – Concentración de un medicamento

Tras administrar un medicamento por vía intravenosa a un paciente de un hospital, la

concentración en sangre (en mg/L) al cabo de t horas es $C(t) = \dfrac{5t}{t+2}$.

a. Calcula $C(0)$, $C(2)$ y $C(10)$.
b. Calcula $\lim_{t\to\infty} C(t)$ e interpreta el resultado.
c. Escribe la asíntota horizontal y explica por qué la concentración no llega nunca a 5 mg/L.
d. ¿Cuánto tiempo tarda en llegar a 4,5 mg/L?

Ejercicio 15

Ejercicio 15 – Interés compuesto y el número e

Un joven deposita 1 000 € a un 4 % anual. Si los intereses se abonan n veces al año, el capital al cabo de un año es $C_n = 1\,000\left(1 + \dfrac{0{,}04}{n}\right)^{n}$.

a. Calcula C_1, C_{12} y C_{365} redondeando a céntimos.
b. Calcula el límite $\lim_{n\to\infty} C_n$ aplicando $\left(1+\frac{k}{n}\right)^{n} \to e^{k}$.
c. Compara el resultado con C_{365} y comenta cuánto se gana al aumentar los abonos.

Ejercicio 16

Ejercicio 16 – El coste medio de la tarifa

Una compañía cobra 20 € de cuota fija mensual más 0,05 € por cada minuto de llamada. El coste medio por minuto de un cliente que habla x minutos es $M(x) = \dfrac{20 + 0{,}05x}{x}$.

a. Calcula $M(100)$, $M(400)$ y $M(2\,000)$.
b. Calcula $\lim_{x\to\infty} M(x)$ e interpreta el resultado.
c. Calcula $\lim_{x\to 0^{+}} M(x)$ y explica qué ocurre.
d. ¿A partir de cuántos minutos el coste medio baja de 0,06 €/min?

Ejercicio 17

Ejercicio 17 – Un excursionista y el teorema de Bolzano

Un excursionista sube a un pico de la sierra de Guadarrama saliendo a las 8:00 de la mañana y llegando a las 16:00. Al día siguiente baja por el mismo camino, saliendo también a las 8:00 y llegando a las 16:00. Llamamos t al número de horas desde las 8:00. Sus alturas, en metros, son $h_1(t) = 1\,000 + 150t$ (subida) y $h_2(t) = 2\,200 - 150t$ (bajada), con $0 \le t \le 8$.

a. Define $g(t) = h_1(t) - h_2(t)$ y calcula $g(0)$ y $g(8)$.
b. Aplica el teorema de Bolzano y explica qué demuestra sobre el excursionista.

c. Calcula la hora exacta y la altura en la que coinciden.
d. ¿Seguiría siendo cierta la conclusión si las funciones no fueran continuas, por ejemplo si el excursionista pudiera teletransportarse?

Ejercicio 18

Ejercicio 18 – Estudio completo de una racional

Estudia la función $f(x) = \dfrac{x^2 - 1}{x^2 - 4}$ siguiendo estos apartados.

a. Calcula el dominio y los puntos de corte con los ejes.
b. Calcula las asíntotas verticales y estudia los límites laterales en cada una.
c. Calcula las asíntotas horizontales y estudia si la gráfica corta a la asíntota.
d. Clasifica los puntos de discontinuidad y resume la información en un bosquejo.

Ejercicio 19

Ejercicio 19 – Continuidad en toda la recta

Se considera la función $f(x) = \{e^x \quad \text{si } x1$

a. Impón la continuidad en $x = 0$ y calcula a.
b. Impón la continuidad en $x = 1$. ¿Es compatible con el valor anterior de a?
c. Deduce que no existe ningún valor de a que haga continua a f en todo $\mathbb{R}$ y clasifica la discontinuidad.
d. ¿Cómo habría que modificar el tercer trozo, $\frac{c}{x}$, para que sí se pudiera?

Ejercicio 20

Ejercicio 20 – Desafío: límites notables

Existen límites que no se resuelven con álgebra y se calculan con tablas o con un argumento geométrico. Comprueba numéricamente que $\lim_{x \to 0} \dfrac{\operatorname{sen} x}{x} = 1$ con x en radianes.

a. Calcula $\dfrac{\operatorname{sen} x}{x}$ para $x = 0{,}5$, $0{,}1$ y $0{,}01$ con la calculadora en radianes.
b. Deduce con ese límite el valor de $\lim_{x \to 0} \dfrac{\operatorname{sen} 3x}{x}$.
c. Calcula $\lim_{x \to 0} \dfrac{1 - \cos x}{x^2}$ multiplicando por $1 + \cos x$.
d. ¿Qué pasaría con el primer límite si x estuviera en grados? Razónalo.