Soluciones - Límites y continuidad

Curso: 1 Bachillerato Ciencias

Solución del ejercicio 1

a. Para $x = 0{,}9$: $1{,}9$; $x = 0{,}99$: $1{,}99$; $x = 1{,}01$: $2{,}01$; $x = 1{,}1$: $2{,}1$. Las imágenes se acercan a 2.

b. Para $x \neq 1$: $\dfrac{(x-1)(x+1)}{x-1} = x+1$, luego $\lim_{x\to 1} f(x) = 1+1 = 2$.

c. $f(1)$ no existe porque el denominador se anula, mientras que el límite sí existe y vale 2. El límite describe a dónde se acerca la función, no el valor en el punto.

Solución del ejercicio 2

a. Por la izquierda se usa $2x-1$: $\lim_{x\to 2^-} f = 2\cdot 2 - 1 = 3$.

b. Por la derecha se usa x^2-3: $\lim_{x\to 2^+} f = 4 - 3 = 1$, y $f(2) = 1$.

c. Como $3 \neq 1$ el límite no existe, y la función no es continua en 2 (salto finito de 2 unidades).

d. En $x = 0$ la función es $2x-1$ cerca de 0: el límite es -1. En $x = 3$ es x^2-3: el límite es 6.

Solución del ejercicio 3

a. Es un cociente de polinomios y el denominador no se anula en $x = 3$ (vale 4), así que la función es continua allí y basta sustituir: $\dfrac{2\cdot 9 - 3}{3+1} = \dfrac{15}{4}$.

b. El denominador x^2+5 nunca se anula. Sustituimos $x = -1$: $\dfrac{(-1)^3 - 2\cdot(-1)}{1+5} = \dfrac{-1+2}{6} = \dfrac{1}{6}$.

c. La raíz es continua donde el radicando es positivo, y en $x = 3$ vale 16: $\sqrt{16} - 3 = 4 - 3 = 1$.

d. La exponencial y el coseno son continuos, y $\cos 0 = 1 \neq 0$: $\dfrac{e^0 + 2}{\cos 0} = \dfrac{1+2}{1} = 3$.

En los cuatro casos no aparece ninguna indeterminación.

Solución del ejercicio 4

a. Al sustituir sale $\frac{0}{0}$. Factorizamos la diferencia de cuadrados y simplificamos el factor común: $\dfrac{(x-3)(x+3)}{x-3} = x+3$, que tiende a 6.

b. También sale $\frac{0}{0}$, así que $x = 2$ es raíz de los dos polinomios. Factorizamos: $\frac{(x-2)(x-3)}{(x-2)(x+2)} = \frac{x-3}{x+2}$, que tiende a $\frac{-1}{4}$.

c. Con raíces multiplicamos y dividimos por el conjugado $\sqrt{x+4}+2$; en el numerador queda una diferencia de cuadrados: $\frac{(x+4)-4}{x(\sqrt{x+4}+2)} = \frac{x}{x(\sqrt{x+4}+2)} = \frac{1}{\sqrt{x+4}+2} \to \frac{1}{2+2} = \frac{1}{4}$.

Solución del ejercicio 5

a. Numerador y denominador tienen grado 2. Dividiendo ambos entre x^2, los demás términos tienden a 0 y queda el cociente de los coeficientes principales: $\frac{3}{2}$.

b. El grado del numerador (3) es mayor que el del denominador (2): el cociente se comporta como $\frac{x^3}{x^2} = x$, que tiende a $+\infty$.

c. El grado del denominador (3) es mayor que el del numerador (1): el denominador crece mucho más deprisa y el límite es 0.

d. Es la misma función que en b), pero ahora $x \to -\infty$. Como se comporta como x, el límite es $-\infty$. En límites infinitos el signo de x importa cuando la diferencia de grados es impar.

Solución del ejercicio 6

a. Multiplicamos y dividimos por el conjugado $\sqrt{x^2+x}+x$: $\frac{(x^2+x)-x^2}{\sqrt{x^2+x}+x} = \frac{x}{\sqrt{x^2+x}+x}$. Ahora la indeterminación es $\frac{\infty}{\infty}$; dividiendo entre x: $\frac{1}{\sqrt{1+1/x}+1} \to \frac{1}{2}$.

b. Con el conjugado $x+\sqrt{x^2-4x}$: $\frac{x^2-(x^2-4x)}{x+\sqrt{x^2-4x}} = \frac{4x}{x+\sqrt{x^2-4x}}$. Dividiendo entre x: $\frac{4}{1+\sqrt{1-4/x}} \to \frac{4}{1+1} = 2$.

c. Aquí no hay raíces: basta restar las fracciones con denominador común: $\frac{x^2-x(x+1)}{x+1} = \frac{-x}{x+1}$. Numerador y denominador tienen el mismo grado, así que el límite es -1.

Solución del ejercicio 7

a. Es una indeterminación 1^∞: la base tiende a 1 y el exponente a infinito. Su valor es, por definición, el número $e \approx 2{,}718$.
b. Reescribimos el exponente para que coincida con el denominador: $2x = \frac{x}{3} \cdot 6$. Entonces $\left(1+\frac{3}{x}\right)^{2x} = \left[\left(1+\frac{3}{x}\right)^{x/3}\right]^6$. Lo de dentro tiende a e, así que el límite es e^6.
c. Escribimos la base como $1+$ algo: $\frac{x+2}{x-1} = 1 + \frac{3}{x-1}$. Entonces $\left(1+\frac{3}{x-1}\right)^x = \left[\left(1+\frac{3}{x-1}\right)^{\frac{x-1}{3}}\right]^{\frac{3x}{x-1}}$. El corchete tiende a e y el exponente a 3, así que el límite es e^3.

Solución del ejercicio 8

a. El denominador se anula en $x = 1$, luego el dominio es $\mathbb{R} \setminus \{1\}$. El numerador vale 3 en ese punto, así que la función tiende a infinito: por la izquierda el denominador es negativo, $\lim_{x\to 1^-} f = -\infty$; por la derecha, positivo, $\lim_{x\to 1^+} f = +\infty$. Asíntota vertical $x = 1$.
b. El grado del numerador es mayor, así que $\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = \pm\infty$: no hay asíntota horizontal.
c. Dividiendo, $2x^2 + 1 = (x-1)(2x+2) + 3$, luego $f(x) = 2x + 2 + \dfrac{3}{x-1}$. Como $\frac{3}{x-1} \to 0$, la asíntota oblicua es $y = 2x + 2$.
d. $m = \lim \frac{2x^2+1}{x(x-1)} = 2$ y $n = \lim\left(\frac{2x^2+1}{x-1} - 2x\right) = \lim \frac{2x+1}{x-1} = 2$. Coincide con la división.

Solución del ejercicio 9

a. Dominio $\mathbb{R} \setminus \{-2, 2\}$. Asíntotas verticales $x = -2$ y $x = 2$ (el numerador no se anula en ellas).
b. En $x = 2$: numerador $7 > 0$; $x^2 - 4 = (x-2)(x+2)$ es positivo si $x > 2$. Entonces $\lim_{x\to 2^+} f = +\infty$ y $\lim_{x\to 2^-} f = -\infty$. En $x = -2$: numerador -5; $x^2 - 4 > 0$ si x. Entonces $\lim_{x\to -2^-} f = -\infty$ y $\lim_{x\to -2^+} f = +\infty$.
c. Grado del denominador mayor: $\lim_{x\to\pm\infty} f = 0$. Asíntota horizontal $y = 0$.
d. Eje OY: $f(0) = -\frac{1}{4}$. Eje OX: $3x + 1 = 0 \Rightarrow x = -\frac{1}{3}$.

Solución del ejercicio 10

a. Al sustituir sale $\frac{0}{0}$. Para $x \neq 2$, factorizamos y simplificamos: $\dfrac{(x-2)(x+2)}{x-2} = x + 2$. Por tanto, $\lim_{x\to 2} f(x) = 2 + 2 = 4$.
b. Para que sea continua deben cumplirse las tres condiciones: existe $f(2) = k$,

existe el límite (vale 4) y coinciden. Hace falta $k = 4$.

c. Con $k = 0$, el límite existe (vale 4) pero no coincide con $f(2) = 0$. Es una discontinuidad evitable: bastaría redefinir el valor de la función en el punto. En la gráfica, la recta $y = x + 2$ tiene un hueco en $(2, 4)$ y un punto aislado en $(2, 0)$.

Solución del ejercicio 11

a. En $x = 0$ se unen el primer y el segundo tramo. Por la izquierda, $\lim_{x \to 0^-}(x + 1) = 1$; el valor es $f(0) = a \cdot 0 + b = b$. Para que sea continua, $b = 1$.

b. En $x = 2$ se unen el segundo y el tercer tramo. $f(2) = 2a + 1$ y, por la derecha, $\lim_{x \to 2^+} x^2 = 4$. Hace falta $2a + 1 = 4$, es decir, $a = \frac{3}{2}$.

c. La función queda $x + 1$ si x, $\frac{3}{2}x + 1$ si $0 \leq x \leq 2$, y x^2 si $x > 2$. Como 1 está en el tramo central, $f(1) = \frac{3}{2} + 1 = \frac{5}{2}$.

d. Para $x \to -\infty$ se usa el primer tramo: $\lim(x + 1) = -\infty$. Para $x \to +\infty$, el tercero: $\lim x^2 = +\infty$.

Solución del ejercicio 12

a. $\lim_{x \to 2^{\pm}} f = \pm\infty$: discontinuidad de salto infinito (asíntota vertical).

b. $\lim_{x \to 1} g = 2$ pero $g(1)$ no existe: discontinuidad evitable.

c. Por la izquierda vale -1 y por la derecha $+1$: salto finito de 2 unidades.

d. Es continua en $x = 0$ (el denominador no se anula): $k(0) = 0 = \lim_{x \to 0} k$.

Solución del ejercicio 13

a. Por la izquierda: $1{,}5$. Por la derecha: $2{,}5$.

b. En $t = 1$ no es continua: los límites laterales son distintos (salto finito de 1 €). En $t = 1{,}5$ sí lo es, porque la función es constante a su alrededor.

c. $2 + \frac{5}{60}$ h supera 2 horas, luego $C = 3{,}5$ €.

d. Pasar solo unos segundos de la hora cuesta un euro más: el precio cambia de golpe, sin valores intermedios.

Solución del ejercicio 14

a. $C(0) = 0$, $C(2) = \dfrac{10}{4} = 2{,}5$ mg/L y $C(10) = \dfrac{50}{12} \approx 4{,}17$ mg/L.

b. $\lim_{t \to \infty} \dfrac{5t}{t + 2} = 5$. La concentración se estabiliza en torno a 5 mg/L a largo plazo.

c. La asíntota es $y = 5$. Como $C(t) = 5 - \dfrac{10}{t + 2}$ y $\frac{10}{t+2} > 0$, siempre es menor que 5.

d. $\dfrac{5t}{t + 2} = 4{,}5 \Rightarrow 5t = 4{,}5t + 9 \Rightarrow 0{,}5t = 9 \Rightarrow t = 18$ horas.

Solución del ejercicio 15

a. $C_1 = 1\,040{,}00$ €, $C_{12} \approx 1\,040{,}74$ € y $C_{365} \approx 1\,040{,}81$ €.
b. $\lim_{n\to\infty} C_n = 1\,000\,e^{0{,}04} \approx 1\,040{,}81$ € (interés compuesto continuo).
c. Casi coincide con C_{365}. Pasar de un abono al año a abonos diarios apenas supone 81 céntimos más: aunque $n \to \infty$, el capital no crece sin límite.

Solución del ejercicio 16

a. $M(100) = \frac{25}{100} = 0{,}25$; $M(400) = \frac{40}{400} = 0{,}10$; $M(2\,000) = \frac{120}{2\,000} = 0{,}06$ €/min.
b. $\lim_{x\to\infty} \left(\frac{20}{x} + 0{,}05\right) = 0{,}05$: el coste medio tiende al precio por minuto, porque la cuota fija se reparte entre muchísimos minutos.
c. $\lim_{x\to 0^+} M(x) = +\infty$: con muy pocos minutos la cuota fija encarece cada uno enormemente.
d. $\frac{20}{x} + 0{,}05$ minutos.

Solución del ejercicio 17

a. $g(t) = 1\,000 + 150t - 2\,200 + 150t = 300t - 1\,200$. $g(0) = -1\,200$ y $g(8) = 1\,200 > 0$.
b. g es continua en $[0, 8]$ y cambia de signo, así que existe $c \in (0, 8)$ con $g(c) = 0$: hay una hora del día en la que el excursionista está exactamente a la misma altura el día de la subida y el de la bajada.
c. $300t - 1\,200 = 0 \Rightarrow t = 4$, es decir, a las 12:00. Altura: $1\,000 + 150 \cdot 4 = 1\,600$ m.
d. No. El teorema exige continuidad: sin ella, la gráfica podría saltar de un lado a otro de $g = 0$ sin pasar por cero.

Solución del ejercicio 18

a. Dominio $\mathbb{R} \setminus \{-2, 2\}$. Cortes: $f(0) = \frac{1}{4}$; $x^2 - 1 = 0 \Rightarrow x = \pm 1$.
b. En $x = 2$: $\lim_{x\to 2^+} f = +\infty$ y $\lim_{x\to 2^-} f = -\infty$. En $x = -2$, por simetría (f es par): $\lim_{x\to -2^-} f = +\infty$ y $\lim_{x\to -2^+} f = -\infty$.
c. $\lim_{x\to\pm\infty} f = 1$: asíntota horizontal $y = 1$. La gráfica no la corta, porque $\frac{x^2-1}{x^2-4} = 1$ daría $-1 = -4$, que es imposible.
d. Hay discontinuidades de salto infinito en $x = \pm 2$. El bosquejo: dos ramas por encima de la asíntota para $|x| > 2$, y una rama central con máximo local en $(0, \frac{1}{4})$ que cruza el eje en ± 1.

Solución del ejercicio 19

a. $\lim_{x\to 0^-} e^x = 1$ y $f(0) = a$. Hace falta $a = 1$.
b. $\lim_{x\to 1^-}(a + x) = a + 1$ y $\lim_{x\to 1^+} \frac{3}{x} = 3$. Hace falta $a + 1 = 3$, es decir, $a = 2$, que contradice $a = 1$.
c. No hay un único a que cumpla las dos condiciones. Con $a = 1$ la función es continua en 0 pero en $x = 1$ vale 2 por la izquierda y 3 por la derecha: salto finito de 1 unidad.
d. Con $\frac{c}{x}$ hace falta $a + 1 = c$ y $a = 1$; entonces $c = 2$ y f sería continua en todo $\mathbb{R}$.

Solución del ejercicio 20

a. Con la calculadora en radianes: $\frac{\operatorname{sen} 0{,}5}{0{,}5} \approx 0{,}9589$; $\frac{\operatorname{sen} 0{,}1}{0{,}1} \approx 0{,}99833$; $\frac{\operatorname{sen} 0{,}01}{0{,}01} \approx 0{,}99998$. Los valores se acercan cada vez más a 1, lo que confirma el límite.
b. Multiplicamos y dividimos por 3 para obtener el límite notable con $u = 3x \to 0$: $\dfrac{\operatorname{sen} 3x}{x} = 3 \cdot \dfrac{\operatorname{sen} 3x}{3x} \to 3 \cdot 1 = 3$.
c. Multiplicando por el conjugado $1 + \cos x$ aparece $1 - \cos^2 x = \operatorname{sen}^2 x$: $\dfrac{\operatorname{sen}^2 x}{x^2(1 + \cos x)} = \left(\dfrac{\operatorname{sen} x}{x}\right)^2 \cdot \dfrac{1}{1 + \cos x} \to 1 \cdot \dfrac{1}{2} = \dfrac{1}{2}$.
d. En grados, $\operatorname{sen} x^\circ \approx \frac{\pi}{180} x$, de modo que el límite valdría $\frac{\pi}{180} \approx 0{,}01745$. Por eso en análisis se trabaja siempre en radianes.