Soluciones del examen - Geometría analítica en el plano

Curso: 1 Bachillerato Ciencias · Duración: 60 minutos · /20

Solución del ejercicio 1 (4 puntos)

a. El vector director es  . La ecuación vectorial es $(x, y) = (-1, 2) + \lambda(4, 2)$.

b. Separando coordenadas, las paramétricas son $x = -1 + 4\lambda$, $y = 2 + 2\lambda$. Despejando λ e igualando, la continua es $\frac{x+1}{4} = \frac{y-2}{2}$.

c. Multiplicando en cruz: $2(x+1) = 4(y-2)$, es decir, $2x + 2 = 4y - 8$; dividiendo entre 2 y ordenando, $x - 2y + 5 = 0$. Despejando y: $y = \frac{1}{2}x + \frac{5}{2}$.

d. En el eje OX, $y = 0$: $x + 5 = 0$, luego $x = -5$. El punto de corte es $(-5, 0)$. Comprobación con la explícita: $\frac{1}{2} \cdot (-5) + \frac{5}{2} = 0$.

Solución del ejercicio 2 (4 puntos)

a. Comparamos los coeficientes de x e y: $\frac{1}{2} \neq \frac{2}{-1}$. Como no son proporcionales, las rectas no son paralelas ni coincidentes: son secantes.

b. Despejamos $x = 4 - 2y$ en r y sustituimos en s: $2(4 - 2y) - y - 3 = 0$, es decir, $5 - 5y = 0$, luego $y = 1$ y $x = 2$. El punto de corte es $(2, 1)$.

c. Las pendientes son $m_r = -\frac{1}{2}$ y $m_s = 2$. Su producto es $-\frac{1}{2} \cdot 2 = -1$, así que son perpendiculares y forman un ángulo de 90°. También: sus vectores normales $(1, 2)$ y $(2, -1)$ tienen producto escalar 0.

Solución del ejercicio 3 (4 puntos)

a. Aplicamos la fórmula de la distancia de un punto a una recta: $d = \frac{|5 \cdot 1 - 12 \cdot (-2) + 3|}{\sqrt{25 + 144}} = \frac{|5 + 24 + 3|}{13} = \frac{32}{13} \approx 2{,}46$.

b. Las rectas paralelas a r tienen los mismos coeficientes de x e y: $5x - 12y + C = 0$. Imponemos que pase por P: $5 + 24 + C = 0$, luego $C = -29$. La recta es $5x - 12y - 29 = 0$.

c. La distancia entre dos paralelas es la de cualquier punto de una a la otra. Como P está en la paralela, es $\frac{32}{13} \approx 2{,}46$. Comprobación con la fórmula de paralelas: $\frac{|-29-3|}{13} = \frac{32}{13}$.

Solución del ejercicio 4 (4 puntos)

a. Completamos cuadrados: $x^2 - 4x = (x-2)^2 - 4$ e $y^2 + 6y = (y+3)^2 - 9$. Queda $(x-2)^2 + (y+3)^2 = 12 + 4 + 9 = 25$. Centro $(2, -3)$ y radio 5.

b. Sustituimos $P(5,1)$: $(5-2)^2 + (1+3)^2 = 9 + 16 = 25$. Cumple la ecuación, así que pertenece a la circunferencia. Equivale a que la distancia de P al centro sea 5.

c. La tangente en P es perpendicular al radio , que actúa como vector normal: $3(x-5) + 4(y-1) = 0$, es decir, $3x + 4y - 19 = 0$. Comprobación: la distancia del centro a esta recta es $\frac{|6-12-19|}{5} = 5$, igual al radio.

Solución del ejercicio 5 (4 puntos)

a. El ancho de la base es el eje mayor, $2a = 12$, así que $a = 6$; la altura máxima es el semieje menor, $b = 4$. La ecuación es $\dfrac{x^2}{36} + \dfrac{y^2}{16} = 1$.

b. Para $x = 3$: $y^2 = 16\left(1 - \frac{9}{36}\right) = 16 \cdot \frac{3}{4} = 12$, luego $y = \sqrt{12} \approx 3{,}46$ m.

c. El camión, centrado y de 5 m de ancho, tiene sus bordes en $x = \pm 2{,}5$, que es donde el arco es más bajo para él. Allí $y = 4\sqrt{1 - \frac{6{,}25}{36}} \approx 3{,}64$ m, mayor que 3,2 m: sí puede pasar, con unos 44 cm de margen.

d. $c = \sqrt{a^2 - b^2} = \sqrt{36 - 16} = \sqrt{20} \approx 4{,}47$, luego $2c \approx 8{,}94$ m.