Apuntes - Geometría analítica en el plano

Curso: 1 Bachillerato Ciencias

En este tema aprenderás: la recta en el plano, posición relativa y ángulos, distancias y lugares geométricos y cónicas. Cada idea va en un cuadro de color, con ejemplos resueltos paso a paso.

Actividad de introducción: el mapa del GPS

Cuando abres una aplicación de mapas para ir andando de tu casa al instituto, el teléfono trabaja con coordenadas: cada lugar es un par de números, la ruta es una sucesión de segmentos y, en cada calle recta, la aplicación sabe en qué punto estás, hacia dónde caminas y cuánto falta para llegar. Sin saberlo, usa geometría analítica.

Si tu casa está en $A(1,2)$ y el instituto en $B(9,10)$, el vector $\overrightarrow{AB}=(8,8)$ describe el desplazamiento, su módulo $8\sqrt{2}$ es la distancia en línea recta y la ecuación de la recta AB permite saber si una panadería situada en otro punto cae sobre el camino o a cuántos metros está de él. En este tema usarás vectores y ecuaciones para describir rectas, medir distancias y ángulos, y estudiar las curvas que aparecen en puentes, antenas y órbitas.

La recta en el plano

Definición: vector director

Una recta queda determinada por un punto $A(x_0,y_0)$ y un **vector director** $\vec{v}=(v_1,v_2)$. Sus ecuaciones son:

- **Vectorial:** $(x,y)=(x_0,y_0)+t(v_1,v_2)$, $t\in\mathbb{R}$.
- **Paramétricas:** $x=x_0+tv_1$, $y=y_0+tv_2$.
- **Continua:** $\frac{x-x_0}{v_1}=\frac{y-y_0}{v_2}$.
- **General:** $Ax+By+C=0$, con $\vec{v}=(-B,A)$ y vector normal (A,B).
- **Explícita:** $y=mx+n$, con pendiente $m=\frac{v_2}{v_1}$. **Punto-pendiente:** $y-y_0=m(x-x_0)$.

Ejemplo 1

La recta por $A(2,1)$ y $B(5,5)$ tiene $\overrightarrow{AB}=(3,4)$, pendiente $\frac{4}{3}$ y ecuación $y-1=\frac{4}{3}(x-2)$, es decir, $4x-3y-5=0$.

Cómo se hace: obtener la ecuación de una recta

1. Con dos puntos A y B, calcula el vector director .
2. Escribe la ecuación vectorial o paramétrica con A y $\vec{v}$.
3. Elimina el parámetro para obtener la ecuación continua, la general $Ax + By + C = 0$ o la explícita $y = mx + n$.
4. Comprueba que los dos puntos cumplen la ecuación.

Ejemplo 2: recta por dos puntos

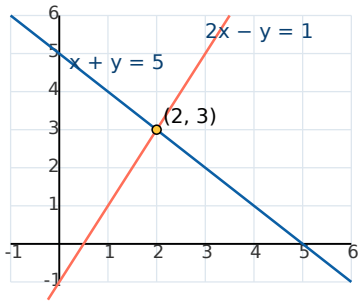
Halla la ecuación general de la recta que pasa por $A(1, 2)$ y $B(3, 6)$.

$\vec{v} = (2, 4)$ y $m = 2$. Entonces $y - 2 = 2(x - 1)$, es decir, $2x - y = 0$. El punto B cumple $2 \cdot 3 - 6 = 0$.

Posición relativa y ángulos

Definición: secantes

Dos rectas $r : Ax + By + C = 0$ y $s : A'x + B'y + C' = 0$ son **secantes** si $\frac{A}{A'} \neq \frac{B}{B'}$; **paralelas** si $\frac{A}{A'} = \frac{B}{B'} \neq \frac{C}{C'}$; **coincidentes** si las tres razones son iguales. Para hallar el punto de corte se resuelve el sistema: $x + y = 5$ y $2x - y = 1$ dan $(2, 3)$.



Definición: ángulo

El **ángulo** entre dos rectas es el menor formado por sus vectores directores: $\cos\alpha = \frac{|\vec{u}\cdot\vec{v}|}{|\vec{u}||\vec{v}|}$, o con pendientes, . Son perpendiculares si $m_1 m_2 = -1$.

Ejemplo 3: ángulo entre dos rectas

Calcula el ángulo entre $r:\ y = 2x$ y $s:\ y = -\frac{x}{3}$.

, luego $\theta = \operatorname{arctg} 7 \approx 81{,}87°$.

Distancias

Regla

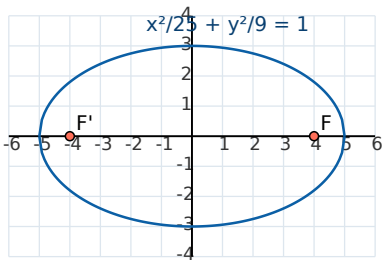
La distancia entre $A(x_1, y_1)$ y $B(x_2, y_2)$ es $d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$. La distancia de $P(x_0, y_0)$ a la recta $Ax + By + C = 0$ es $d = \frac{|Ax_0 + By_0 + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}}$. Por ejemplo, de $P(2, 3)$ a $3x + 4y - 3 = 0$: $\frac{|6 + 12 - 3|}{5} = 3$. La distancia entre dos rectas paralelas es la de un punto de una a la otra.

Lugares geométricos y cónicas

Definición: lugar geométrico

Un **lugar geométrico** es el conjunto de puntos que cumplen una propiedad. La **mediatriz** de AB es el lugar de los puntos equidistantes de A y B (una recta). Las **cónicas** son los lugares siguientes (con centro en el origen y ejes paralelos a los de coordenadas):

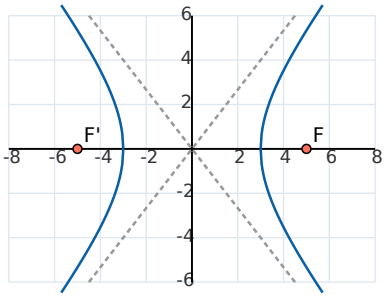
- **Circunferencia** (distancia constante r al centro (a, b)): $(x - a)^2 + (y - b)^2 = r^2$. Si aparece $x^2 + y^2 + Dx + Ey + F = 0$, el centro es $\left(-\frac{D}{2}, -\frac{E}{2}\right)$ y $r^2 = \frac{D^2}{4} + \frac{E^2}{4} - F$.
- **Elipse** (suma de distancias a dos focos constante, $2a$): $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$, con $c^2 = a^2 - b^2$, focos $(\pm c, 0)$ y excentricidad $e = \frac{c}{a}$.
- **Hipérbola** (diferencia de distancias constante, $2a$): $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$, con $c^2 = a^2 + b^2$ y asíntotas $y = \pm\frac{b}{a}x$.
- **Parábola** (equidista del foco y de la directriz): $y^2 = 2px$, con foco $\left(\frac{p}{2}, 0\right)$ y directriz $x = -\frac{p}{2}$.



Ejemplo 4

En $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{9} = 1$: $a = 5$, $b = 3$, $c = \sqrt{25 - 9} = 4$; focos $(\pm 4, 0)$ y $e = 0{,}8$.

En $\frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{16} = 1$: $c = 5$, focos $(\pm 5, 0)$ y asíntotas $y = \pm\frac{4}{3}x$.



¡Atención! Errores frecuentes

- Olvidar el valor absoluto en la fórmula de la distancia punto-recta.
- Confundir el vector director $(-B, A)$ con el normal (A, B).
- En la elipse, usar $c^2 = a^2 + b^2$ (esa es la hipérbola).
- Olvidar completar cuadrados para leer centro y radio de una circunferencia.

Formas de la ecuación de la recta

Propiedad: seis formas de escribir una recta

Una recta queda determinada por un punto $P(x_0, y_0)$ y un vector director $\vec{v} = (v_1, v_2)$. Sus ecuaciones son: **vectorial** $(x, y) = (x_0, y_0) + \lambda(v_1, v_2)$; **paramétricas** $x = x_0 + \lambda v_1$, $y = y_0 + \lambda v_2$; **continua** $\frac{x - x_0}{v_1} = \frac{y - y_0}{v_2}$; **punto-pendiente** $y - y_0 = m(x - x_0)$ con $m = \frac{v_2}{v_1}$; **explícita** $y = mx + n$; y **general** $Ax + By + C = 0$, donde (A, B) es un vector normal a la recta y $(-B, A)$ es un vector director.

Cómo se hace: pasar de una forma a otra

1. De la vectorial o paramétricas a la continua: despeja λ en cada ecuación e iguala.
2. De la continua a la general: multiplica en cruz y pasa todo al primer miembro.
3. De la general a la explícita: despeja y; la pendiente es $-\frac{A}{B}$.
4. De la general a la vectorial: toma un vector director $(-B, A)$ y un punto cualquiera que cumpla la ecuación.

Ejemplo 5

Escribe la recta que pasa por $P(2, -1)$ con pendiente -3 en forma general y en paramétricas.

Punto-pendiente: $y + 1 = -3(x - 2)$, es decir, $y = -3x + 5$. Pasando todo al primer miembro, $3x + y - 5 = 0$. Un vector director es $(1, -3)$, así que las paramétricas son $x = 2 + \lambda$, $y = -1 - 3\lambda$. Comprobación: con $\lambda = 1$ se obtiene $(3, -4)$ y $3 \cdot 3 - 4 - 5 = 0$.

Distancias y áreas

Regla: distancia de un punto a una recta

La distancia de $P(x_0, y_0)$ a la recta $Ax + By + C = 0$ es $d = \dfrac{|Ax_0 + By_0 + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}}$. Esta fórmula resulta de proyectar el vector que une P con un punto de la recta sobre el vector normal (A, B). Con ella se calcula también la distancia entre dos rectas paralelas (la de un punto cualquiera de una a la otra) y la altura de un triángulo.

Propiedad: área de un triángulo

El área de un triángulo de vértices A, B y C es la mitad del valor absoluto del determinante de los vectores y : $S = \frac{1}{2}|u_1 w_2 - u_2 w_1|$ si y . También se calcula como base por altura entre dos, con la altura obtenida de la distancia de un vértice a la recta que contiene al lado opuesto.

Ejemplo 6

Calcula la distancia de $P(4, 3)$ a la recta $5x + 12y - 8 = 0$.

Sustituimos: $5 \cdot 4 + 12 \cdot 3 - 8 = 20 + 36 - 8 = 48$. El denominador es $\sqrt{25 + 144} = 13$. Entonces $d = \frac{48}{13} \approx 3{,}69$ unidades. El valor absoluto garantiza que la distancia no sea negativa, aunque el punto esté al otro lado de la recta.

Mediatriz y bisectriz como lugares geométricos

Definición: lugar geométrico

Un **lugar geométrico** es el conjunto de todos los puntos del plano que cumplen una misma propiedad. La **mediatriz** de un segmento es el lugar de los puntos que equidistan de sus extremos. La **bisectriz** de dos rectas es el lugar de los puntos que equidistan de ellas. La **circunferencia** es el lugar de los puntos que están a distancia fija r de un centro.

Cómo se hace: hallar un lugar geométrico

1. Llama $P(x, y)$ a un punto genérico del lugar.
2. Traduce la propiedad a una igualdad de distancias o de ángulos con la fórmula adecuada.
3. Si hay raíces, eleva al cuadrado los dos miembros y simplifica.
4. Reconoce la curva obtenida (recta, circunferencia, parábola…) y comprueba un punto.

Ejemplo 7

Halla el lugar geométrico de los puntos cuya distancia a $A(1,0)$ es el doble de su distancia a $B(-2,0)$.

La condición es $\sqrt{(x-1)^2+y^2} = 2\sqrt{(x+2)^2+y^2}$. Elevamos al cuadrado: $x^2-2x+1+y^2 = 4x^2+16x+16+4y^2$, que se simplifica en $3x^2+3y^2+18x+15=0$, es decir, $x^2+y^2+6x+5=0$. Completamos cuadrados: $(x+3)^2+y^2=4$. Es una circunferencia de centro $(-3,0)$ y radio 2.

La circunferencia

Propiedad: ecuación de la circunferencia

La circunferencia de centro $C(a,b)$ y radio r tiene ecuación reducida $(x-a)^2+(y-b)^2=r^2$. Al desarrollarla se obtiene la forma general $x^2+y^2+Dx+Ey+F=0$, con centro $\left(-\frac{D}{2},-\frac{E}{2}\right)$ y radio $r=\sqrt{\frac{D^2+E^2}{4}-F}$ (debe ser positivo). Una recta es **secante** si su distancia al centro es menor que r, **tangente** si es igual y **exterior** si es mayor. La tangente en un punto P es perpendicular al radio CP.

Elipse, hipérbola y parábola

Definición: cónicas

Una **elipse** es el lugar de los puntos cuya suma de distancias a dos focos F y F' es constante, $2a$. Una **hipérbola** es el lugar de los puntos cuya diferencia de distancias a los focos es constante, $2a$. Una **parábola** es el lugar de los puntos que equidistan de un foco y de una recta llamada directriz. Las tres se obtienen al cortar un cono con un plano, por eso se llaman **cónicas**.

Cónica	Ecuación reducida	Focos y datos
Elipse	x²/a² + y²/b² = 1	c² = a² − b²; focos (±c, 0)
Hipérbola	x²/a² − y²/b² = 1	c² = a² + b²; asíntotas y = ±(b/a)x
Parábola	y² = 2px	foco (p/2, 0); directriz x = −p/2

Ejemplo 8

Halla la ecuación reducida de la elipse de focos $(\pm 3,0)$ y semieje mayor 5.

Tenemos $a=5$, $c=3$, de modo que $b^2=a^2-c^2=25-9=16$. La ecuación es $\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{16}=1$. Su excentricidad $e=\frac{c}{a}=0{,}6$ indica que es poco achatada (si e fuera 0 sería una circunferencia).

¡Atención! errores frecuentes en geometría analítica

No olvides el valor absoluto en la fórmula de la distancia. En la ecuación general, el vector director es $(-B, A)$, no (A, B), que es el normal. Dos rectas con pendientes opuestas no son perpendiculares: lo son cuando el producto de las pendientes vale -1. Y en la elipse, el semieje mayor a es el mayor, no el que está en el eje x necesariamente.

¿Sabías que? Apolonio y las órbitas

Las cónicas fueron estudiadas por Apolonio de Perge hace más de dos mil años. Casi dos mil años más tarde, Johannes Kepler descubrió que los planetas giran alrededor del Sol describiendo elipses, con el Sol en uno de los focos. Y los faros de los coches, las antenas parabólicas y los telescopios usan la propiedad de la parábola de concentrar en el foco todos los rayos paralelos a su eje.

El consejo de Otto

Para una recta perpendicular a $Ax + By + C = 0$, usa el vector normal (A, B) como vector director: así no hay que calcular pendientes.