Ejercicios - Geometría analítica en el plano

Curso: 1 Bachillerato Ciencias · 20

Se debe mostrar el desarrollo de cada ejercicio.

Ejercicio 1

Ejercicio 1 – Recta por dos puntos

Los puntos $A(-2,1)$ y $B(4,5)$ definen una recta r. Vamos a escribir su ecuación de varias maneras.

a. Calcula el vector y la pendiente de la recta.

b. Escribe la ecuación punto-pendiente y la ecuación explícita.
c. Escribe la ecuación general $Ax + By + C = 0$.
d. Comprueba que el punto $(1,3)$ pertenece a la recta.

Ejercicio 2

Ejercicio 2 – Todas las ecuaciones de una recta

La recta r pasa por $A(1,2)$ y tiene vector director $\vec{v} = (3,-1)$.

a. Escribe la ecuación vectorial y las ecuaciones paramétricas.
b. Escribe la ecuación continua.
c. Pasa a la ecuación general y a la explícita.
d. Calcula el punto que corresponde a $\lambda = 2$.

Ejercicio 3

Ejercicio 3 – Analizar una recta

Dada la recta $r:\ 3x - 2y + 6 = 0$, extrae toda la información que puedas.

a. Escribe la ecuación explícita y la pendiente.
b. Halla un vector director y un vector normal.
c. Calcula los puntos de corte con los ejes.
d. Comprueba si el punto $(2,6)$ está en la recta.

Ejercicio 4

Ejercicio 4 – Posición relativa de dos rectas

Dos rectas son secantes, paralelas o coincidentes según sea la proporcionalidad entre

sus coeficientes. Clasifica cada pareja y, si son secantes, halla el punto de corte.

a. $r:\ 2x-y+3=0$ y $s:\ 4x-2y+1=0$
b. $t:\ x+y-6=0$ y $u:\ 2x+2y-12=0$
c. $v:\ x-2y+1=0$ y $w:\ 3x+y-4=0$

Ejercicio 5

Ejercicio 5 – Ángulo entre dos rectas

El ángulo agudo entre dos rectas de pendientes m_1 y m_2 cumple .

También se puede calcular con los vectores directores.

a. Halla el ángulo entre $r:\ x-y+2=0$ y $s:\ 3x+y-1=0$ con las pendientes.
b. Comprueba el resultado con los vectores directores $\vec{u}=(1,1)$ y $\vec{w}=(1,-3)$: $\cos\alpha=\dfrac{|\vec{u}\cdot\vec{w}|}{|\vec{u}||\vec{w}|}$.
c. ¿Qué condición cumplen las pendientes de dos rectas perpendiculares? Aplícala a $y=2x+1$.

Ejercicio 6

Ejercicio 6 – Distancia de un punto a una recta

La distancia del punto $P(x_0,y_0)$ a la recta $r:\ Ax+By+C=0$ es $d=\dfrac{|Ax_0+By_0+C|}{\sqrt{A^2+B^2}}$. Sea $r:\ 3x+4y-12=0$.

a. Calcula la distancia de $P(2,-1)$ a r.
b. Calcula la distancia de $Q(-3,2)$ a r.
c. Calcula la distancia del origen a r y los puntos de corte de r con los ejes. ¿Qué área limita r con los ejes?

Ejercicio 7

Ejercicio 7 – Rectas paralelas

Dos rectas paralelas $3x+4y-12=0$ y $3x+4y+8=0$ forman una franja.

a. Comprueba que son paralelas.
b. Calcula la distancia entre ellas tomando un punto de la primera.
c. Escribe la ecuación de la recta paralela a ambas situada exactamente en medio.

Ejercicio 8

Ejercicio 8 – Punto medio y mediatriz

La **mediatriz** de un segmento es la recta perpendicular a él que pasa por su punto medio; sus puntos equidistan de los extremos. Sean $A(-1, 3)$ y $B(5, -1)$.

a. Calcula el punto medio M y el vector $\overrightarrow{AB}$.

b. Escribe la ecuación de la mediatriz.
c. Comprueba que $P(0, -2)$ está en la mediatriz calculando $d(P, A)$ y $d(P, B)$.
d. Calcula la longitud del segmento AB.

Ejercicio 9

Ejercicio 9 – Senderos en el parque natural

En el mapa de una ruta de senderismo por la sierra de Gredos, con la unidad en kilómetros, el sendero A pasa por los puntos $(0, 2)$ y $(6, 5)$ y el sendero B pasa por $(1, 6)$ y $(5, 2)$. Un refugio está en el punto $R(6, 0)$.

a. Escribe la ecuación general de cada sendero.
b. Calcula el punto en que se cruzan.
c. ¿A qué distancia está el refugio del sendero A?
d. Si un caminante recorre en línea recta el tramo del cruce hasta el refugio, ¿cuántos kilómetros anda?

Ejercicio 10

Ejercicio 10 – El tendido eléctrico

Una compañía eléctrica debe colocar postes entre una subestación $A(1, 2)$ y un pueblo $B(9, 10)$ (coordenadas en kilómetros). Quiere colocar 3 postes intermedios a la misma distancia entre sí y de los extremos, sobre el segmento recto AB.

a. Calcula el vector $\overrightarrow{AB}$ y su módulo.

b. Calcula el vector que separa dos postes consecutivos.
c. Calcula las coordenadas de los tres postes.
d. Calcula la distancia entre dos postes consecutivos y el coste de los cables si cuestan 4 500 € por kilómetro entre A y B.

Ejercicio 11

Ejercicio 11 – Una parcela triangular

Un solar tiene forma de triángulo con vértices $A(0, 0)$, $B(8, 2)$ y $C(3, 7)$, con las coordenadas en decámetros (1 dam = 10 m). Se quiere calcular su superficie de dos maneras y su precio a 120 €/m^2.

a. Calcula el área con la fórmula $S = \frac{1}{2}|x_B y_C - x_C y_B|$ (con A en el origen).
b. Escribe la recta AB y la distancia de C a ella.

c. Comprueba el área con base por altura entre dos.
d. Convierte a m^2 y calcula el precio.

Ejercicio 12

Ejercicio 12 – El alcance del router

Un router wifi situado en el punto $C(3,4)$ de un plano (unidades en metros) tiene un alcance de 5 m, de modo que cubre el círculo de centro C y radio 5.

a. Escribe la ecuación de la circunferencia que limita la zona de cobertura, en forma reducida y general.
b. ¿Reciben señal los puntos $(1,2)$, $(8,10)$ y $(6,8)$?
c. Comprueba que el origen $(0,0)$ está justo en el límite.
d. Una persona sigue la recta $y=4$. ¿Entre qué valores de x tiene cobertura?

Ejercicio 13

Ejercicio 13 – Centro y radio

Para identificar una circunferencia dada en forma general se completan cuadrados, o se usa que el centro es $\left(-\frac{D}{2},-\frac{E}{2}\right)$ en $x^2+y^2+Dx+Ey+F=0$.

a. Halla el centro y el radio de $x^2+y^2-6x+4y-12=0$.
b. Halla la circunferencia que pasa por $A(0,0)$, $B(4,0)$ y $C(0,2)$.
c. Comprueba que el punto $(4,2)$ está en la misma circunferencia.

Ejercicio 14

Ejercicio 14 – Tangentes y secantes a una circunferencia

Sea la circunferencia $x^2+y^2=25$ de centro el origen y radio 5.

a. Comprueba que $P(3,4)$ pertenece a ella y halla la recta tangente en P.
b. Calcula la distancia del centro a la recta $x+y-1=0$ y decide si es secante, tangente o exterior.
c. Halla los puntos de corte entre la circunferencia y esa recta.
d. Calcula la longitud de la cuerda que determinan.

Ejercicio 15

Ejercicio 15 – La antena parabólica

Una antena parabólica tiene como sección la curva formada por los puntos $P(x,y)$ que equidistan del foco $F(2,0)$ y de la recta directriz $x=-2$. Las unidades son metros.

a. Escribe la condición $d(P,F)=d(P,\text{directriz})$ y llega a la ecuación de la parábola.
b. Comprueba que el vértice es el origen y calcula el punto de la parábola con $x=2$

.

c. Si el diámetro de la antena en el borde es 8 m, calcula su profundidad.

Ejercicio 16

Ejercicio 16 – El jardín elíptico

Un jardín de un parque tiene forma de elipse con el eje mayor horizontal de 10 m y el eje menor de 6 m. En sus focos hay dos fuentes. Tomamos el centro del jardín como origen.

a. Escribe la ecuación reducida $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$.
b. Calcula $c = \sqrt{a^2 - b^2}$ y la distancia entre las fuentes.
c. Comprueba que un punto cualquiera, por ejemplo $(0, 3)$, cumple que la suma de las distancias a los focos vale $2a$.
d. Calcula la anchura del jardín (medida en vertical) a 3 m del centro.

Ejercicio 17

Ejercicio 17 – Hipérbola

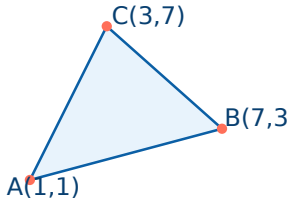
Sea la hipérbola $\dfrac{x^2}{9} - \dfrac{y^2}{16} = 1$.

a. Identifica a y b y calcula $c = \sqrt{a^2 + b^2}$.
b. Halla los vértices, los focos y la excentricidad $e = \frac{c}{a}$.
c. Escribe las asíntotas $y = \pm \frac{b}{a} x$.
d. Comprueba que el punto $\left(5, \frac{16}{3}\right)$ pertenece a la hipérbola.

Ejercicio 18

Ejercicio 18 – El triángulo ABC

Los vértices de un triángulo son $A(1, 1)$, $B(7, 3)$ y $C(3, 7)$. Estudia sus elementos.



a. Calcula la longitud de los tres lados y clasifica el triángulo.
b. Escribe la ecuación de la recta BC.
c. Calcula la altura desde A y el área.
d. Halla el punto medio M de BC y la mediana AM. ¿Qué observas?
e. Calcula las coordenadas del baricentro.

Ejercicio 19

Ejercicio 19 – Bisectrices de dos rectas

Los puntos que equidistan de dos rectas secantes forman sus bisectrices. Sean $r:\ 3x+4y-5=0$ y $s:\ 12x-5y+2=0$.

a. Escribe la condición $d(P,r)=d(P,s)$ para $P(x,y)$.
b. Obtén las dos ecuaciones de las bisectrices.
c. Comprueba que son perpendiculares entre sí.
d. Halla el punto de corte de r y s y comprueba que está en ambas bisectrices.

Ejercicio 20

Ejercicio 20 – Desafío: la circunferencia tangente al eje

Se busca una circunferencia tangente al eje de abscisas que pase por los puntos $A(1,2)$ y $B(3,2)$.

a. Explica por qué el centro está en la mediatriz de AB, y escríbela.
b. Si el centro es $(2,k)$ y es tangente al eje OX, ¿cuánto vale el radio en función de k?
c. Plantea la condición $d(C,A)=r$ y calcula k.
d. Escribe la ecuación de la circunferencia.