Soluciones - Geometría analítica en el plano

Curso: 1 Bachillerato Ciencias

Solución del ejercicio 1

a. Restamos las coordenadas del origen a las del extremo: . La pendiente es el cociente entre la segunda y la primera componente: $m = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}$.

b. Con el punto $A(-2, 1)$ y la pendiente: $y - 1 = \frac{2}{3}(x + 2)$. Despejando y: $y = \frac{2}{3}x + \frac{4}{3} + 1 = \frac{2}{3}x + \frac{7}{3}$, que es la ecuación explícita.

c. Multiplicamos la explícita por 3 para quitar denominadores: $3y = 2x + 7$. Pasando todo a un miembro, $2x - 3y + 7 = 0$.

d. Un punto pertenece a la recta si cumple su ecuación: $2 \cdot 1 - 3 \cdot 3 + 7 = 2 - 9 + 7 = 0$. Sí pertenece.

Solución del ejercicio 2

a. La ecuación vectorial expresa cada punto como el punto conocido más un múltiplo del director: $(x, y) = (1, 2) + \lambda(3, -1)$. Separando coordenadas obtenemos las paramétricas: $x = 1 + 3\lambda$, $y = 2 - \lambda$, con $\lambda \in \mathbb{R}$.

b. Despejamos λ en cada paramétrica e igualamos: $\frac{x - 1}{3} = \frac{y - 2}{-1}$.

c. Multiplicamos en cruz: $-(x - 1) = 3(y - 2)$, es decir, $-x + 1 = 3y - 6$, y ordenando, $x + 3y - 7 = 0$. Despejando y, la explícita es $y = -\frac{1}{3}x + \frac{7}{3}$, con pendiente $-\frac{1}{3} = \frac{-1}{3}$, coherente con el vector director.

d. Sustituimos $\lambda = 2$ en las paramétricas: $x = 1 + 6 = 7$ e $y = 2 - 2 = 0$. El punto es $(7, 0)$.

Solución del ejercicio 3

a. Despejamos y: $-2y = -3x - 6$, luego $y = \frac{3}{2}x + 3$. La pendiente es $\frac{3}{2}$ y la ordenada en el origen, 3.

b. En $Ax + By + C = 0$, el vector normal es $\vec{n} = (A, B) = (3, -2)$. Un vector director es $\vec{v} = (-B, A) = (2, 3)$, perpendicular a $\vec{n}$ porque $3 \cdot 2 + (-2) \cdot 3 = 0$.

c. Con $x = 0$: $-2y + 6 = 0$, $y = 3$, punto $(0, 3)$. Con $y = 0$: $3x + 6 = 0$, $x = -2$, punto $(-2, 0)$.
d. Sustituimos: $3 \cdot 2 - 2 \cdot 6 + 6 = 6 - 12 + 6 = 0$. El punto $(2, 6)$ cumple la ecuación, así que sí está en la recta.

Solución del ejercicio 4

a. Comparamos: $\frac{2}{4} = \frac{-1}{-2} = \frac{1}{2}$, pero $\frac{3}{1} = 3 \neq \frac{1}{2}$. Los coeficientes de x e y son proporcionales y el término independiente no: las rectas son paralelas.
b. $\frac{1}{2} = \frac{1}{2} = \frac{-6}{-12}$: todos los coeficientes son proporcionales; las rectas son coincidentes.
c. $\frac{1}{3} \neq \frac{-2}{1}$: son secantes. De $x = 2y - 1$ en $3x + y - 4 = 0$: $6y - 3 + y - 4 = 0 \Rightarrow y = 1$ y $x = 1$. Se cortan en $(1, 1)$.

Solución del ejercicio 5

a. Despejando y, r tiene pendiente $m_1 = 1$ y s ($y = -3x + 1$) tiene $m_2 = -3$.

   Entonces , y con la calculadora

   $\alpha = \operatorname{arctg} 2 \approx 63{,}43^\circ$.
b. $\vec{u} \cdot \vec{w} = 1 \cdot 1 + 1 \cdot (-3) = -2$; $|\vec{u}| = \sqrt{2}$ y $|\vec{w}| = \sqrt{10}$. $\cos\alpha = \frac{2}{\sqrt{20}} \approx 0{,}4472$, luego $\alpha \approx 63{,}43^\circ$. Coincide con el apartado a); el valor absoluto garantiza que obtenemos el ángulo agudo.
c. Dos rectas son perpendiculares si el producto de sus pendientes es -1: $m_1 m_2 = -1$. Una perpendicular a $y = 2x + 1$ tiene pendiente $-\frac{1}{2}$, por ejemplo $y = -\frac{1}{2}x$.

Solución del ejercicio 6

a. Sustituimos $P(2, -1)$ en el numerador de la fórmula: $|3 \cdot 2 + 4 \cdot (-1) - 12| = |-10| = 10$. El denominador es $\sqrt{9 + 16} = 5$. Por tanto, $d = \frac{10}{5} = 2$.
b. Para $Q(-3, 2)$: $|3 \cdot (-3) + 4 \cdot 2 - 12| = |-13| = 13$, y $d = \frac{13}{5} = 2{,}6$.
c. Para el origen: $d(O, r) = \frac{|-12|}{5} = \frac{12}{5} = 2{,}4$. Cortes con los ejes: con $y = 0$,

$x = 4$; con $x = 0$, $y = 3$; puntos $(4, 0)$ y $(0, 3)$. La recta forma con los ejes un triángulo rectángulo de catetos 4 y 3, de área $\frac{4 \cdot 3}{2} = 6$. Comprobación: hipotenusa 5 y altura $2{,}4$ dan $\frac{5 \cdot 2{,}4}{2} = 6$.

Solución del ejercicio 7

a. Los coeficientes de x e y coinciden, pero los términos independientes no: son paralelas.
b. Un punto de la primera es $(4, 0)$. Su distancia a la segunda es $\frac{|12 + 0 + 8|}{5} = \frac{20}{5} = 4$.
c. La del medio tiene como término independiente la media de -12 y 8, es decir, -2 : $3x + 4y - 2 = 0$. Está a 2 unidades de cada una.

Solución del ejercicio 8

a. El punto medio es la media de las coordenadas: $M = \left(\frac{-1 + 5}{2}, \frac{3 - 1}{2}\right) = (2, 1)$.
El vector es [redacted].
b. La mediatriz es perpendicular a AB, así que [redacted] es su vector normal, y pasa por M: $6(x - 2) - 4(y - 1) = 0$, es decir, $6x - 4y - 8 = 0$, y simplificando, $3x - 2y - 4 = 0$.
c. $3 \cdot 0 - 2 \cdot (-2) - 4 = 0$: P está en la recta. Además $d(P, A) = \sqrt{(0 + 1)^2 + (-2 - 3)^2} = \sqrt{26}$ y $d(P, B) = \sqrt{25 + 1} = \sqrt{26}$: equidista de los extremos, como todo punto de la mediatriz.
d. $|AB| = \sqrt{6^2 + (-4)^2} = \sqrt{52} = 2\sqrt{13} \approx 7{,}21$.

Solución del ejercicio 9

a. Sendero A: pendiente $\frac{5 - 2}{6 - 0} = \frac{1}{2}$ y ordenada en el origen 2, así que $y = \frac{1}{2}x + 2$, es decir, $x - 2y + 4 = 0$. Sendero B: pendiente $\frac{2 - 6}{5 - 1} = -1$, $y - 6 = -(x - 1)$, es decir, $x + y - 7 = 0$.
b. Resolvemos el sistema. Restando la primera ecuación a la segunda: $3y - 11 = 0$, luego $y = \frac{11}{3}$ y $x = 7 - \frac{11}{3} = \frac{10}{3}$. Se cruzan en $\left(\frac{10}{3}, \frac{11}{3}\right)$.
c. Distancia de $R(6, 0)$ a $x - 2y + 4 = 0$: $d = \frac{|6 - 0 + 4|}{\sqrt{1 + 4}} = \frac{10}{\sqrt{5}} = 2\sqrt{5} \approx 4{,}47$ km.
d. Distancia entre dos puntos:

$\sqrt{\left(6-\frac{10}{3}\right)^2+\left(0-\frac{11}{3}\right)^2}=\sqrt{\frac{64}{9}+\frac{121}{9}}=\sqrt{\frac{185}{9}}\approx 4{,}53$ km.

Solución del ejercicio 10

a.  . Su módulo es la longitud del tendido:

$|AB|=\sqrt{64+64}=\sqrt{128}=8\sqrt{2}\approx 11{,}31$ km.

b. Con 3 postes intermedios el segmento queda dividido en 4 tramos iguales, así que el vector entre postes consecutivos es $\frac{1}{4}(8,8)=(2,2)$.

c. Sumamos ese vector sucesivamente a A: $P_1=(1,2)+(2,2)=(3,4)$, $P_2=(5,6)$ y $P_3=(7,8)$. Comprobación: $P_3+(2,2)=(9,10)=B$.

d. Cada tramo mide $|(2,2)|=\sqrt{8}=2\sqrt{2}\approx 2{,}83$ km. El cable cubre los 11,31 km, con un coste de $11{,}31\cdot 4\,500\approx 50\,912$ €.

Solución del ejercicio 11

a. Con A en el origen, el área es la mitad del valor absoluto del determinante formado por B y C: $S=\frac{1}{2}|8\cdot 7-3\cdot 2|=\frac{1}{2}|56-6|=25$ dam^2.

b. AB pasa por el origen con vector $(8,2)$, es decir, pendiente $\frac{1}{4}$: $y=\frac{x}{4}$, o $x-4y=0$. Distancia de C: $d(C,AB)=\dfrac{|3-4\cdot 7|}{\sqrt{1+16}}=\dfrac{25}{\sqrt{17}}\approx 6{,}06$ dam.

c. La base mide $|AB|=\sqrt{64+4}=\sqrt{68}\approx 8{,}25$ dam y la altura es la distancia anterior: $S=\frac{1}{2}\cdot\sqrt{68}\cdot\frac{25}{\sqrt{17}}=\frac{1}{2}\cdot 2\cdot 25=25$ dam^2. Coincide.

d. Como 1 dam$^2=100$ m^2, $S=2\,500$ m^2 y el precio es $2\,500\cdot 120=300\,000$ €.

Solución del ejercicio 12

a. $(x-3)^2+(y-4)^2=25$. Desarrollando: $x^2+y^2-6x-8y+9+16-25=0$, es decir, $x^2+y^2-6x-8y=0$.

b. $(1,2)$: $d=\sqrt{4+4}=2{,}83$, con señal. $(8,10)$: $d=\sqrt{25+36}=7{,}81>5$, sin señal. $(6,8)$: $d=\sqrt{9+16}=5$, en el límite.

c. $d(O,C)=\sqrt{9+16}=5$. Efectivamente está en la circunferencia (se ve también porque la ecuación general no tiene término independiente).

d. Con $y=4$: $(x-3)^2=25\Rightarrow x=-2$ o $x=8$. Tiene cobertura para $-2\le x\le 8$.

Solución del ejercicio 13

a. Completamos cuadrados agrupando x e y: $x^2-6x=(x-3)^2-9$ e

$y^2 + 4y = (y+2)^2 - 4$. La ecuación queda $(x-3)^2 + (y+2)^2 = 12 + 9 + 4 = 25$. Centro $(3, -2)$ y radio $\sqrt{25} = 5$.

b. El centro equidista de los tres puntos. Por equidistar de A y B está en su mediatriz, $x = 2$; por equidistar de A y C, en $y = 1$. Centro $(2, 1)$ y radio $d(A, \text{centro}) = \sqrt{4+1} = \sqrt{5}$. Ecuación: $(x-2)^2 + (y-1)^2 = 5$.

c. $(4-2)^2 + (2-1)^2 = 4 + 1 = 5$. Sí está: $(4, 2)$ es el cuarto vértice del rectángulo de vértices A, B y C, y el centro es el punto medio de su diagonal.

Solución del ejercicio 14

a. $3^2 + 4^2 = 25$: P está en la circunferencia. La tangente es perpendicular al radio, así que es su vector normal: $3(x-3) + 4(y-4) = 0$, es decir, $3x + 4y - 25 = 0$.

b. $d = \dfrac{|0 + 0 - 1|}{\sqrt{1+1}} = \dfrac{1}{\sqrt{2}} \approx 0{,}71$. Como es menor que el radio 5, la recta es secante: corta a la circunferencia en dos puntos.

c. Despejamos $y = 1 - x$ y sustituimos: $x^2 + (1-x)^2 = 25$, es decir, $2x^2 - 2x - 24 = 0$, o $x^2 - x - 12 = 0$, con $x = 4$ o $x = -3$. Los puntos son $(4, -3)$ y $(-3, 4)$.

d. La cuerda es la distancia entre ellos: $\sqrt{(4+3)^2 + (-3-4)^2} = \sqrt{98} = 7\sqrt{2} \approx 9{,}90$.

Solución del ejercicio 15

a. La distancia a F es $\sqrt{(x-2)^2 + y^2}$ y la distancia a la recta $x = -2$ es $|x+2|$. Igualamos y elevamos al cuadrado: $x^2 - 4x + 4 + y^2 = x^2 + 4x + 4$. Simplificando, $y^2 = 8x$.

b. Con $x = 0$ se obtiene $y = 0$: el vértice es el origen, a mitad de camino entre el foco y la directriz. Con $x = 2$ (la abscisa del foco): $y^2 = 16$, $y = \pm 4$; son los extremos del lado recto.

c. Un diámetro de 8 m en el borde significa que el borde está en $y = \pm 4$. Entonces $x = \frac{y^2}{8} = \frac{16}{8} = 2$: la antena tiene 2 m de profundidad, y su foco queda justo a la altura del borde.

Solución del ejercicio 16

a. El semieje mayor es la mitad del eje mayor, $a = 5$, y el menor, $b = 3$. La ecuación es $\dfrac{x^2}{25} + \dfrac{y^2}{9} = 1$.

b. $c = \sqrt{25-9} = \sqrt{16} = 4$. Los focos están en $(\pm 4, 0)$, así que las fuentes están a $2c = 8$ m una de otra.
c. Para $(0,3)$: $d_1 = \sqrt{(0-4)^2+3^2} = 5$ y $d_2 = \sqrt{(0+4)^2+3^2} = 5$. La suma es $10 = 2a$, como exige la definición de elipse.
d. Con $x = 3$: $y^2 = 9\left(1 - \frac{9}{25}\right) = \frac{144}{25}$, luego $y = \pm\frac{12}{5} = \pm 2{,}4$. La anchura vertical a 3 m del centro es $2 \cdot 2{,}4 = 4{,}8$ m.

Solución del ejercicio 17

a. Comparando con $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$: $a^2 = 9$ y $b^2 = 16$, luego $a = 3$, $b = 4$. En la hipérbola $c^2 = a^2 + b^2$: $c = \sqrt{9+16} = 5$.
b. Los vértices están sobre el eje X a distancia a: $(\pm 3, 0)$. Los focos, a distancia c: $(\pm 5, 0)$. Excentricidad $e = \frac{c}{a} = \frac{5}{3} \approx 1{,}67$, mayor que 1, como en toda hipérbola.
c. Las asíntotas son $y = \pm\frac{b}{a}x = \pm\frac{4}{3}x$: las ramas se acercan a ellas sin tocarlas.
d. Sustituimos: $\frac{25}{9} - \frac{(16/3)^2}{16} = \frac{25}{9} - \frac{256/9}{16} = \frac{25}{9} - \frac{16}{9} = 1$. Sí pertenece.

Solución del ejercicio 18

a. $|AB| = \sqrt{36+4} = \sqrt{40}$, $|AC| = \sqrt{4+36} = \sqrt{40}$, $|BC| = \sqrt{16+16} = \sqrt{32}$. Dos lados iguales: isósceles.
b. , pendiente -1: $y - 3 = -(x-7) \Rightarrow x + y - 10 = 0$.
c. $h = d(A, BC) = \frac{|1+1-10|}{\sqrt{2}} = \frac{8}{\sqrt{2}} = 4\sqrt{2} \approx 5{,}66$. Área $= \frac{1}{2} \cdot 4\sqrt{2} \cdot 4\sqrt{2} = 16$ unidades cuadradas. (Con el determinante: $\frac{1}{2}|6 \cdot 6 - 2 \cdot 2| = 16$.)
d. $M = \left(\frac{7+3}{2}, \frac{3+7}{2}\right) = (5, 5)$. La mediana AM tiene dirección $(4, 4)$, es decir, es la recta $y = x$, perpendicular a BC: coincide con la altura y la mediatriz, como corresponde a un triángulo isósceles.
e. $G = \left(\frac{1+7+3}{3}, \frac{1+3+7}{3}\right) = \left(\frac{11}{3}, \frac{11}{3}\right)$.

Solución del ejercicio 19

a. $\frac{|3x+4y-5|}{5} = \frac{|12x-5y+2|}{13}$ (las normas son $\sqrt{9+16} = 5$ y $\sqrt{144+25} = 13$).
b. $13(3x+4y-5) = \pm 5(12x-5y+2)$. Con el signo $+$:
$39x + 52y - 65 = 60x - 25y + 10 \Rightarrow 21x - 77y + 75 = 0$. Con el signo $-$:
$39x + 52y - 65 = -60x + 25y - 10 \Rightarrow 99x + 27y - 55 = 0$.

c. Pendientes: $\frac{21}{77} = \frac{3}{11}$ y $-\frac{99}{27} = -\frac{11}{3}$. Su producto es -1: son perpendiculares.
d. De $3x + 4y = 5$ y $12x - 5y = -2$: $x = \frac{17}{63}$ e $y = \frac{22}{21}$. Sustituyendo en las dos bisectrices se obtiene 0 en ambas: el punto de corte pertenece a las dos.

Solución del ejercicio 20

a. El centro equidista de A y B, así que está en la mediatriz de AB: el punto medio es $(2, 2)$ y , luego la mediatriz es $x = 2$.
b. La distancia del centro al eje OX es $|k|$: el radio es $r = |k|$.
c. $(1-2)^2 + (2-k)^2 = k^2 \Rightarrow 1 + 4 - 4k + k^2 = k^2 \Rightarrow 5 = 4k \Rightarrow k = \dfrac{5}{4}$.
d. Centro $\left(2, \frac{5}{4}\right)$, radio $\frac{5}{4}$: $(x-2)^2 + \left(y - \dfrac{5}{4}\right)^2 = \dfrac{25}{16}$.