Soluciones del examen - Funciones y ecuaciones trigonométricas

Curso: 1 Bachillerato Ciencias · Duración: 55 minutos · /20

Solución del ejercicio 1 (3 puntos)

a. Comparamos con $y = A\,\mathrm{sen}(Bx + C) + D$: $A = 2$, $B = 3$, $C = -\pi$, $D = 1$. La amplitud es $|A| = 2$; el periodo, $\frac{2\pi}{3}$; el desfase, $-\frac{C}{B} = \frac{\pi}{3}$, es decir, la gráfica se desplaza $\frac{\pi}{3}$ a la derecha. Para el periodo se divide 2π entre $|B|$.

b. El recorrido es $[D - |A|,\, D + |A|] = [1 - 2,\, 1 + 2] = [-1, 3]$. Además, $f(0) = 2\,\mathrm{sen}(-\pi) + 1 = 2 \cdot 0 + 1 = 1$, que es el valor de la línea media. La función alcanza el máximo 3 cuando el seno vale 1, y el mínimo -1 cuando el seno vale -1.

Solución del ejercicio 2 (4 puntos)

a. Despejamos: $\mathrm{sen}\, x = \frac{\sqrt{3}}{2}$. El ángulo agudo es $\frac{\pi}{3}$ y, como el seno también es positivo en el segundo cuadrante, la otra solución es $\pi - \frac{\pi}{3} = \frac{2\pi}{3}$. Solución general: $\frac{\pi}{3} + 2k\pi$ o $\frac{2\pi}{3} + 2k\pi$, con $k \in \mathbb{Z}$.

b. El ángulo de referencia es $\frac{\pi}{3}$ y el coseno es negativo en el segundo y tercer cuadrante: $x = \pi - \frac{\pi}{3} = \frac{2\pi}{3}$ y $x = \pi + \frac{\pi}{3} = \frac{4\pi}{3}$.

c. $\mathrm{tg}\, \frac{\pi}{4} = 1$ y la tangente es negativa en el segundo y cuarto cuadrante: $x = \frac{3\pi}{4}$ y $x = \frac{7\pi}{4}$ (separadas un periodo, π).

Solución del ejercicio 3 (4 puntos)

a. Con el cambio $t = \mathrm{sen}\, x$ la ecuación queda $2t^2 + t - 1 = 0$. Por la fórmula de segundo grado, $t = \frac{-1 \pm \sqrt{1+8}}{4} = \frac{-1 \pm 3}{4}$, es decir, $t = \frac{1}{2}$ o $t = -1$. Ambos valores están en $[-1, 1]$, así que los dos son válidos. El discriminante de la ecuación en t es 9, un cuadrado perfecto.

b. Deshacemos el cambio. $\mathrm{sen}\, x = \frac{1}{2}$ da $x = \frac{\pi}{6}$ y $x = \frac{5\pi}{6}$. $\mathrm{sen}\, x = -1$ da $x = \frac{3\pi}{2}$. Hay tres soluciones en $[0, 2\pi)$. Comprobación con $\frac{3\pi}{2}$: $2 \cdot 1 - 1 - 1 = 0$ ✓.

Solución del ejercicio 4 (4 puntos)

a. Sustituimos la identidad: $2\,\mathrm{sen}\, x \cos x = \cos x$. Pasamos todo a un miembro y sacamos factor común: $2\,\mathrm{sen}\, x \cos x - \cos x = 0$, es decir, $\cos x(2\,\mathrm{sen}\, x - 1) = 0$. Así queda un producto igualado a cero.

b. Primer factor: $\cos x = 0$, con $x = \frac{\pi}{2}$ y $x = \frac{3\pi}{2}$. Segundo factor: $\operatorname{sen} x = \frac{1}{2}$, con $x = \frac{\pi}{6}$ y $x = \frac{5\pi}{6}$. Son cuatro soluciones. No se debe dividir entre $\cos x$, porque se perderían las dos soluciones en las que vale 0.

Solución del ejercicio 5 (5 puntos)

a. Máximo 22 m, mínimo 2 m y periodo $\frac{2\pi}{\pi/20} = 40$ s. La altura oscila alrededor de 12 m (el centro de la noria) con amplitud 10 m, el radio: $12 + 10 = 22$ y $12 - 10 = 2$.
b. $h(10) = 12 - 10\cos\frac{\pi}{2} = 12$ m. A los 10 s ha dado un cuarto de vuelta y está a la altura del centro.
c. $12 - 10\cos\frac{\pi t}{20} = 17 \Rightarrow \cos\frac{\pi t}{20} = -\frac{1}{2} \Rightarrow \frac{\pi t}{20} = \frac{2\pi}{3}$ o $\frac{4\pi}{3}$. Entonces $t = \frac{40}{3} \approx 13{,}33$ s y $t = \frac{80}{3} \approx 26{,}67$ s. En la primera vuelta $t \in [0, 40)$, así que $\frac{\pi t}{20} \in [0, 2\pi)$; el coseno vale $-\frac{1}{2}$ en el segundo y en el tercer cuadrante.
d. Está por encima de 17 m entre $13{,}33$ s y $26{,}67$ s, es decir, durante $\frac{40}{3} \approx 13{,}33$ s de cada vuelta. Entre esos instantes $\cos\frac{\pi t}{20} < -\frac{1}{2}$, de modo que $h(t) > 17$: es un tercio de cada vuelta.