Apuntes - Funciones y ecuaciones trigonométricas

Curso: 1 Bachillerato Ciencias

En este tema aprenderás: gráficas de las funciones trigonométricas, transformaciones, ecuaciones trigonométricas y modelos periódicos. Cada idea va en un cuadro de color, con ejemplos resueltos paso a paso.

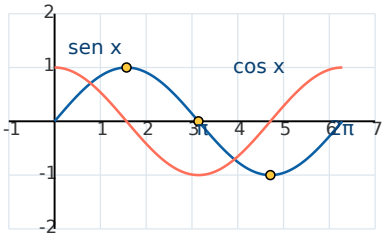
Actividad de introducción: la noria de la feria

Imagina que subes a una noria en la feria de tu ciudad. Sales del punto más bajo y empiezas a girar. Al principio subes despacio, luego más rápido, llegas arriba, empiezas a bajar y vuelves al punto de partida. Si dibujaras la altura en función del tiempo, la gráfica tendría forma de ola y se repetiría una vuelta tras otra. Esa ola es una función trigonométrica. Para una noria de 14 m de diámetro, con el punto más bajo a 1 m del suelo y una vuelta cada 30 s, la altura es $h(t) = 8 - 7\cos\frac{\pi t}{15}$. Los números de esa fórmula se leen fácilmente: 8 es el centro, 7 es la amplitud y 30 s el periodo. En este tema aprenderás a interpretar cada parámetro, a dibujar la gráfica y a resolver las ecuaciones que aparecen al preguntar «¿en qué momento estoy a 12 m de altura?».

Gráficas de las funciones trigonométricas

Propiedad

Las funciones $y = \operatorname{sen} x$ y $y = \cos x$ están definidas en todo $\mathbb{R}$, tienen recorrido $[-1, 1]$ y son **periódicas** de periodo 2π: se repiten cada 2π. El seno es impar (simétrico respecto del origen) y el coseno es par (simétrico respecto del eje Y). La función $y = \tan x$ tiene recorrido $\mathbb{R}$, periodo π y asíntotas verticales en $x = \frac{\pi}{2} + k\pi$, donde no está definida.



Transformaciones

Propiedad

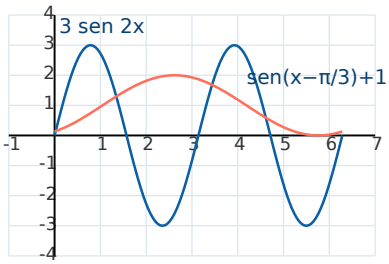
Para $y = A\operatorname{sen}(Bx + C) + D$ (lo mismo con el coseno): la **amplitud** es $|A|$; el **periodo**

es $\frac{2\pi}{|B|}$; el **desfase** es $-\frac{C}{B}$ (desplazamiento horizontal); y D desplaza verticalmente, con lo que el recorrido es $[D-|A|, D+|A|]$.

Ejemplo 1

$y = 3\,\mathrm{sen}\,2x$ tiene amplitud 3 y periodo $\frac{2\pi}{2} = \pi$.

La función $y = \mathrm{sen}\left(x - \frac{\pi}{3}\right) + 1$ se desplaza $\frac{\pi}{3}$ a la derecha y 1 hacia arriba: recorrido $[0, 2]$, periodo 2π.



Ejemplo 2: periodo y amplitud

Halla el periodo y la amplitud de $y = 3\,\mathrm{sen}(2x)$.

La amplitud es 3 y el periodo es $T = \frac{2\pi}{2} = \pi$: la gráfica repite su forma cada π radianes y oscila entre -3 y 3.

Ecuaciones trigonométricas

Propiedad

Resolver una ecuación trigonométrica es hallar los ángulos que la cumplen. Como las funciones son periódicas, hay infinitas soluciones, que se expresan en un intervalo (por ejemplo $[0, 2\pi)$) o como **solución general** sumando $2k\pi$ (o $k\pi$ para la tangente), con $k \in \mathbb{Z}$.

Propiedad: ecuaciones trigonométricas

- $\mathrm{sen}\,x = a$ ($|a| \leq 1$) tiene dos soluciones por vuelta: x y $\pi - x$. Para $\mathrm{sen}\,x = \frac{1}{2}$: $x = \frac{\pi}{6}$ o $x = \frac{5\pi}{6}$.
- $\cos x = a$ tiene dos soluciones: x y $2\pi - x$. Para $\cos x = -\frac{\sqrt{2}}{2}$: $x = \frac{3\pi}{4}$ o $\frac{5\pi}{4}$.
- $\tan x = a$ tiene dos soluciones por vuelta: x y $x + \pi$. Para $\tan x = \sqrt{3}$: $\frac{\pi}{3}$ y $\frac{4\pi}{3}$.

Propiedad

Ecuaciones con una sola razón. Con un cambio de variable se reducen a ecuaciones algebraicas. **Ejemplo 2.** $2\,\mathrm{sen}^2\,x - \mathrm{sen}\,x - 1 = 0$: con $t = \mathrm{sen}\,x$,

$2t^2 - t - 1 = 0$, de donde $t = 1$ o $t = -\frac{1}{2}$. Entonces $x = \frac{\pi}{2}$, $x = \frac{7\pi}{6}$ o $x = \frac{11\pi}{6}$.

Propiedad

Con razones distintas. Se usan identidades para dejar una sola razón o para factorizar. **Ejemplo 3.**
$\operatorname{sen} 2x = \operatorname{sen} x \Rightarrow 2\operatorname{sen} x \cos x - \operatorname{sen} x = 0 \Rightarrow \operatorname{sen} x(2\cos x - 1) = 0$. Entonces $\operatorname{sen} x = 0$ ($x = 0, \pi$) o $\cos x = \frac{1}{2}$ ($x = \frac{\pi}{3}, \frac{5\pi}{3}$). **No se debe dividir entre** $\operatorname{sen} x$, porque se perderían soluciones.

Propiedad

Ángulo múltiple. Si aparece $2x$ se resuelve para $2x$ en un intervalo doble y luego se divide: $\operatorname{sen} 2x = \frac{\sqrt{3}}{2}$ da $2x = \frac{\pi}{3}, \frac{2\pi}{3}, \frac{7\pi}{3}, \frac{8\pi}{3}$, y por tanto $x = \frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{3}, \frac{7\pi}{6}, \frac{4\pi}{3}$.

Cómo se hace: resolver una ecuación trigonométrica

1. Despeja la razón trigonométrica ($\operatorname{sen} x$, $\cos x$ o $\operatorname{tg} x$).
2. Busca los ángulos de la primera vuelta que cumplen la igualdad (hay dos en general).
3. Añade los periodos: $2k\pi$ para seno y coseno, $k\pi$ para tangente, con $k \in \mathbb{Z}$.
4. Comprueba las soluciones, sobre todo si has elevado al cuadrado o usado identidades.

Ejemplo 3: seno igual a un medio

Resuelve $\operatorname{sen} x = \frac{1}{2}$.

En la primera vuelta, $x = \frac{\pi}{6}$ y $x = \frac{5\pi}{6}$. Todas las soluciones son $x = \frac{\pi}{6} + 2k\pi$ y $x = \frac{5\pi}{6} + 2k\pi$, con $k \in \mathbb{Z}$.

Modelos periódicos

Regla

Las mareas, las ruedas giratorias o las ondas se modelizan con $y = A\operatorname{sen}(Bx + C) + D$. Por ejemplo, $h(t) = 5 + 3\operatorname{sen}\frac{\pi t}{6}$ tiene máximo 8, mínimo 2 y periodo 12 h. Para $h = 6{,}5$: $\operatorname{sen}\frac{\pi t}{6} = \frac{1}{2}$, luego $t = 1$ h o $t = 5$ h.

¡Atención! Errores frecuentes

- Dar solo una de las dos soluciones por vuelta.
- Dividir entre una razón trigonométrica que puede valer 0.

- Olvidar que $\operatorname{sen} x = 2$ no tiene solución (el seno está en $[-1, 1]$).
- Confundir amplitud con periodo, o no dividir entre 2 al deshacer $2x$.

Valores notables y circunferencia unidad

Propiedad: tabla de valores notables

En la circunferencia unidad, el punto que corresponde al ángulo x tiene coordenadas $(\cos x, \operatorname{sen} x)$. Los ángulos que debes recordar son 0, $\frac{\pi}{6}$, $\frac{\pi}{4}$, $\frac{\pi}{3}$ y $\frac{\pi}{2}$, con senos 0, $\frac{1}{2}$, $\frac{\sqrt{2}}{2}$, $\frac{\sqrt{3}}{2}$, 1 y los cosenos en orden contrario. Los demás ángulos de cada cuadrante se obtienen por simetría: $\operatorname{sen}(\pi - x) = \operatorname{sen} x$, $\cos(\pi - x) = -\cos x$ y $\operatorname{sen}(x + \pi) = -\operatorname{sen} x$.

x	0	π/6	π/4	π/3	π/2
sen x	0	1/2	√2/2	√3/2	1
cos x	1	√3/2	√2/2	1/2	0

Cómo dibujar y = A sen(Bx + C) + D

Cómo se hace: dibujar una función sinusoidal

1. Dibuja la línea media $y = D$ y las rectas $y = D \pm |A|$ que acotan la gráfica.
2. Calcula el periodo $T = \frac{2\pi}{|B|}$ y el desfase $-\frac{C}{B}$: ahí empieza un ciclo.
3. Divide el periodo en cuatro partes iguales; así obtienes los cinco puntos clave del ciclo (en la línea media, máximo, línea media, mínimo y línea media).
4. Si A la gráfica se invierte: el ciclo empieza bajando.
5. Une los puntos con una curva suave y repite el ciclo.

Ejemplo 4

Dibuja $y = 3\operatorname{sen}\left(2x - \frac{\pi}{2}\right) + 1$ en un periodo.

La línea media es $y = 1$ y los extremos son 1 ± 3, es decir, 4 y -2. El periodo es π y el desfase es $-\frac{C}{B} = \frac{\pi}{4}$. El ciclo empieza en $x = \frac{\pi}{4}$ (valor 1, subiendo), alcanza el máximo 4 en $x = \frac{\pi}{2}$, vuelve a 1 en $x = \frac{3\pi}{4}$, llega al mínimo -2 en $x = \pi$ y termina en 1 en $x = \frac{5\pi}{4}$.

Obtener la fórmula a partir de los datos

Cómo se hace: ajustar un modelo sinusoidal

1. Con el máximo M y el mínimo m calcula $D = \frac{M+m}{2}$ y $A = \frac{M-m}{2}$.

2. Con el tiempo entre dos máximos consecutivos obtén el periodo T y calcula $B = \frac{2\pi}{T}$.
3. Elige seno o coseno según el dato conocido: si el máximo ocurre en t_0, usa $A\cos(B(t-t_0))+D$; si sube por la línea media en t_0, usa $A\,\mathrm{sen}(B(t-t_0))+D$.
4. Comprueba la fórmula con un dato que no hayas usado.

Ejemplo 5

Una cámara frigorífica oscila entre -2 °C y 6 °C, y alcanza el máximo a las 4:00 con un ciclo de 8 horas. Escribe el modelo.

$D = \frac{6+(-2)}{2} = 2$ y $A = \frac{6-(-2)}{2} = 4$. El periodo es 8 h, así que $B = \frac{2\pi}{8} = \frac{\pi}{4}$. Como el máximo ocurre en $t = 4$: $T(t) = 2 + 4\cos\frac{\pi(t-4)}{4}$. Comprobación: $T(4) = 6$ y $T(8) = 2 + 4\cos\pi = -2$.

Ecuaciones trigonométricas: método y errores

Regla: no pierdas soluciones

Una ecuación como $\mathrm{sen}\,x\cos x = \mathrm{sen}\,x$ se resuelve pasando todo a un lado y **factorizando**: $\mathrm{sen}\,x(\cos x - 1) = 0$. Si divides entre $\mathrm{sen}\,x$ pierdes las soluciones de $\mathrm{sen}\,x = 0$. Cuando hay dos razones distintas, usa las identidades $\mathrm{sen}^2 x + \cos^2 x = 1$ y $\mathrm{sen}\,2x = 2\,\mathrm{sen}\,x\cos x$ para quedarte con una sola. Si elevas al cuadrado, comprueba las soluciones al final, porque pueden aparecer soluciones falsas.

Ejemplo 6

Resuelve en $[0, 2\pi)$: $2\cos^2 x = 3\,\mathrm{sen}\,x$.

Sustituyendo: $2 - 2\,\mathrm{sen}^2 x = 3\,\mathrm{sen}\,x$, o sea $2t^2 + 3t - 2 = 0$ con $t = \mathrm{sen}\,x$. Resolvemos: $t = \frac{-3\pm5}{4}$, es decir, $t = \frac{1}{2}$ o $t = -2$. La segunda no vale, porque el seno nunca es -2. Queda $\mathrm{sen}\,x = \frac{1}{2}$, con $x = \frac{\pi}{6}$ y $x = \frac{5\pi}{6}$.

¡Atención! la calculadora da una sola solución

Si escribes $\mathrm{sen}^{-1}(0{,}5)$, la calculadora devuelve solo 30°. Pero hay otra solución en 150°. Para el coseno falta la simétrica respecto del eje horizontal y para la tangente hay que sumar 180°. Estudia siempre el dibujo de la circunferencia unidad para encontrar todos los ángulos de la vuelta.

Funciones trigonométricas inversas

Definición: arcoseno, arcocoseno y arcotangente

Como las funciones trigonométricas no son inyectivas, para invertirlas se restringen a un intervalo. El **arcoseno** $\arcsen y$ devuelve el ángulo de $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ cuyo seno es y; el **arcocoseno** devuelve el ángulo de $[0, \pi]$; y el **arcotangente** el ángulo de $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$. En la calculadora son las teclas sen^{-1}, $\cos^{-1}$ y $\tan^{-1}$.

Modelos periódicos en problemas

Cómo se hace: resolver un problema con un modelo periódico

1. Identifica la magnitud que oscila (altura, temperatura, nivel de agua, presión) y la variable independiente, normalmente el tiempo.
2. Lee en la fórmula los valores máximo, mínimo, periodo y línea media; comprueba que tienen sentido en el contexto.
3. Para preguntas del tipo «¿cuándo vale…?», iguala la fórmula al valor pedido y resuelve la ecuación trigonométrica.
4. Entre las soluciones, quédate con las que caen en el intervalo del problema (una vuelta, un día, un año) y escribe la respuesta con las unidades correspondientes.
5. Para preguntas del tipo «¿durante cuánto tiempo supera…?», resuelve la desigualdad con las dos soluciones de la ecuación.

Ejemplo 7

Una pequeña turbina eólica de un parque de Albacete tiene una pala cuya punta está a una altura $h(t) = 30 + 12\operatorname{sen}\frac{\pi t}{3}$ metros, con t en segundos. ¿Cuándo está a 36 m?

Igualamos: $30 + 12\operatorname{sen}\frac{\pi t}{3} = 36$, de modo que $\operatorname{sen}\frac{\pi t}{3} = \frac{1}{2}$. Entonces $\frac{\pi t}{3} = \frac{\pi}{6}$ o $\frac{5\pi}{6}$, y por tanto $t = 0{,}5$ s o $t = 2{,}5$ s en la primera vuelta. El periodo es $\frac{2\pi}{\pi/3} = 6$ s, así que la punta vuelve a estar a 36 m en $t = 6{,}5$ s y $t = 8{,}5$ s, y así sucesivamente.

¿Sabías que? Las ondas están en todas partes

En el siglo XIX, el matemático francés Joseph Fourier demostró que casi cualquier señal periódica puede escribirse como suma de senos y cosenos de distintas frecuencias. Gracias a esta idea, tu teléfono comprime las canciones en MP3 y las fotografías en JPEG, y los médicos obtienen imágenes en las resonancias magnéticas. Las funciones trigonométricas son, en realidad, el alfabeto de las ondas.

El consejo de Otto

Dibuja la circunferencia goniométrica y marca el valor pedido: verás al instante los dos ángulos que lo cumplen.