Ejercicios - Funciones y ecuaciones trigonométricas

Curso: 1 Bachillerato Ciencias · 20

Se debe mostrar el desarrollo de cada ejercicio.

Ejercicio 1

Ejercicio 1 – Valores notables

Completa la tabla con los valores exactos de las razones trigonométricas de los ángulos notables. Usa la circunferencia unidad y recuerda que $\operatorname{tg} x = \frac{\operatorname{sen} x}{\cos x}$.

a. $x = 0$ y $x = \frac{\pi}{6}$
b. $x = \frac{\pi}{4}$ y $x = \frac{\pi}{3}$
c. $x = \frac{\pi}{2}$ y $x = \pi$
d. $x = \frac{3\pi}{2}$ (explica por qué la tangente no existe en $\frac{\pi}{2}$ y en $\frac{3\pi}{2}$).

Ejercicio 2

Ejercicio 2 – Periodo y simetría

Las funciones trigonométricas son periódicas. Para $y = \operatorname{sen}(Bx)$ y $y = \cos(Bx)$ el periodo es $\frac{2\pi}{|B|}$, y para $y = \operatorname{tg}(Bx)$ es $\frac{\pi}{|B|}$.

a. Calcula el periodo de $y = \operatorname{sen} 2x$, de $y = \cos \frac{x}{2}$ y de $y = \operatorname{tg} 3x$.
b. Indica el dominio y el recorrido de $y = \operatorname{sen} x$, $y = \cos x$ e $y = \operatorname{tg} x$.
c. Clasifica cada una como par o impar justificando con $f(-x)$.
d. Si $\operatorname{sen} x = 0{,}6$, ¿cuánto vale $\operatorname{sen}(x + 2\pi)$? ¿Y $\operatorname{sen}(-x)$?

Ejercicio 3

Ejercicio 3 – Amplitud, periodo y desfase

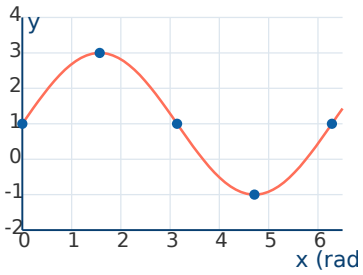
Para $y = A\operatorname{sen}(Bx + C) + D$: la amplitud es $|A|$, el periodo $\frac{2\pi}{|B|}$, el desfase $-\frac{C}{B}$ y el recorrido $[D - |A|, D + |A|]$. Estudia:

a. $y = 3\operatorname{sen} 2x$
b. $y = 2\cos\left(x - \frac{\pi}{3}\right) + 1$
c. $y = -\operatorname{sen} \frac{x}{2}$
d. $y = \operatorname{sen}(2x + \pi) - 2$

Ejercicio 4

Ejercicio 4 – Dibujar por tabla de valores

Vamos a representar $y = 2\,\text{sen}\,x + 1$ en el intervalo $[0, 2\pi]$ transformando la gráfica de $y = \text{sen}\,x$.



a. Completa la tabla para $x = 0,\ \frac{\pi}{2},\ \pi,\ \frac{3\pi}{2},\ 2\pi$.
b. Indica los valores máximo y mínimo y dónde se alcanzan.
c. Describe las transformaciones respecto de $y = \text{sen}\,x$.

Ejercicio 5

Ejercicio 5 – Ecuaciones básicas

Resuelve en el intervalo $[0, 2\pi)$ y escribe después la solución general con $k \in \mathbb{Z}$.

a. $\text{sen}\,x = \frac{1}{2}$
b. $\cos x = -\frac{\sqrt{2}}{2}$
c. $\text{tg}\,x = \sqrt{3}$
d. $\text{sen}\,x = \frac{3}{2}$

Ejercicio 6

Ejercicio 6 – Cambio de variable

Resuelve en $[0, 2\pi)$ las ecuaciones reduciéndolas a una ecuación de segundo grado en una razón trigonométrica.

a. $2\cos^2 x - \cos x - 1 = 0$
b. $\text{tg}^2\,x - 3 = 0$
c. $2\,\text{sen}^2\,x - 3\,\text{sen}\,x + 1 = 0$

Ejercicio 7

Ejercicio 7 – Ecuaciones con identidades

Resuelve en $[0, 2\pi)$. Factoriza, no dividas entre una razón que pueda valer cero.

a. $\text{sen}\,2x = \text{sen}\,x$
b. $\text{tg}\,x = 2\,\text{sen}\,x$
c. Comprueba con la calculadora que $x = \frac{\pi}{3}$ cumple la primera.

Ejercicio 8

Ejercicio 8 – Ángulo múltiple

Cuando la incógnita aparece multiplicada, como en $\operatorname{sen} 2x$, hay que resolver para $2x$ en un intervalo doble y luego dividir.

a. Resuelve $\operatorname{sen} 2x = \frac{\sqrt{3}}{2}$ en $[0, 2\pi)$.
b. Resuelve $\cos 3x = \frac{1}{2}$ en $[0, 2\pi)$.
c. ¿Cuántas soluciones tiene en total la primera? ¿Por qué?

Ejercicio 9

Ejercicio 9 – La noria de la feria

En la feria de una ciudad hay una noria de 14 m de diámetro cuyo punto más bajo está a 1 m del suelo. Da una vuelta completa cada 30 segundos y se sube un viajero en el punto más bajo. Su altura sobre el suelo es $h(t) = 8 - 7\cos\left(\frac{\pi t}{15}\right)$, con t en segundos.

a. Calcula la altura máxima y mínima, y el periodo.
b. Calcula la altura del viajero a los 10 s.
c. ¿En qué instantes de la primera vuelta está a 12 m de altura? Redondea a centésimas.
d. Explica el significado de los números 8 y 7 de la fórmula.

Ejercicio 10

Ejercicio 10 – La marea y el barco

En el puerto de A Coruña, el nivel del agua sobre el fondo de la dársena es $h(t) = 2{,}5 + 1{,}5\operatorname{sen}\frac{\pi t}{6}$ metros, con t en horas desde la medianoche. Un velero necesita al menos 3,25 m de agua para salir.

a. Calcula el nivel máximo y mínimo y el tiempo entre dos pleamares.
b. Calcula $h(3)$ y $h(9)$.
c. Resuelve $h(t) = 3{,}25$ en las primeras 12 horas.
d. ¿Entre qué horas puede salir el velero en la primera marea? ¿Cuántas horas dura la ventana?

Ejercicio 11

Ejercicio 11 – La temperatura de un día de verano

En una ciudad del interior, la temperatura de un día de julio sigue el modelo $T(t) = 15 - 8\cos\left(\frac{\pi(t-3)}{12}\right)$, donde t es la hora del día (de 0 a 24).

a. Calcula la temperatura mínima y la máxima y a qué hora se alcanzan.
b. Calcula la temperatura a las 12:00 con una decimal.

c. ¿Entre qué horas la temperatura supera los 19 °C?
d. Calcula la temperatura media del modelo e interprétala.

Ejercicio 12

Ejercicio 12 – El muelle del laboratorio

En el laboratorio de física de un instituto, una masa colgada de un muelle oscila verticalmente. Su posición respecto del punto de equilibrio, en centímetros, es $x(t) = 5\cos(4\pi t)$, con t en segundos.

a. Calcula la amplitud, el periodo y la frecuencia (oscilaciones por segundo).
b. Calcula $x(0{,}1)$ con tres decimales.
c. ¿Cuándo pasa por primera vez por el punto de equilibrio ($x = 0$)?
d. ¿Cuántos puntos de equilibrio recorre en 2 segundos?

Ejercicio 13

Ejercicio 13 – La nota La y el sonido

Un diapasón emite la nota La, cuya presión sonora es $p(t) = 0{,}8\,\mathrm{sen}(2\pi \cdot 440\,t)$ unidades, con t en segundos. La frecuencia es el número de oscilaciones por segundo.

a. Calcula la amplitud, el periodo y la frecuencia.
b. Escribe la función de la nota La de la octava siguiente, que tiene doble frecuencia. ¿Cuál es su periodo?
c. Calcula $p\left(\frac{1}{1\,760}\right)$.
d. ¿Qué efecto tiene doblar la amplitud sobre la gráfica? ¿Y sobre el sonido?

Ejercicio 14

Ejercicio 14 – Las horas de luz en Valladolid

El número de horas de luz del día d del año en una ciudad de Castilla se aproxima por $L(d) = 12 + 2{,}5\,\mathrm{sen}\left(\frac{2\pi(d-80)}{365}\right)$, donde $d = 1$ es el 1 de enero.

a. Calcula los valores máximo y mínimo de L y el periodo.
b. Calcula $L(80)$, $L(172)$ y $L(355)$ y relaciónalos con equinoccios y solsticios.
c. ¿Cuántos días tiene el año con más de 13 horas de luz según este modelo? Resuelve $\mathrm{sen}\,\theta > 0{,}4$.
d. ¿Qué cambiaría en la fórmula en una ciudad más al norte, con días más largos en verano?

Ejercicio 15

Ejercicio 15 – Hallar la fórmula a partir de datos

La gráfica de una función $y = A\,\mathrm{sen}(Bx) + D$ tiene valor máximo 5, valor mínimo -1,

periodo π y pasa por el punto $(0, 2)$ con pendiente creciente.

a. Calcula D (línea media) y A (amplitud) a partir del máximo y del mínimo.
b. Calcula B a partir del periodo.
c. Escribe la función y comprueba que cumple $f(0) = 2$.
d. Calcula $f\left(\frac{\pi}{4}\right)$ y $f\left(\frac{3\pi}{4}\right)$.

Ejercicio 16

Ejercicio 16 – Un modelo de marea a partir de una tabla

El puerto de Vigo publica la altura de la marea (h, en metros) en distintas horas de un día. Se observa que la pleamar es de 4,2 m a las 3:00 y la bajamar es de 0,6 m a las 9:00, con un ciclo que se repite cada 12 horas. Se desea ajustar un modelo $h(t) = D + A\cos\frac{\pi(t-3)}{6}$.

Hora	3:00	9:00	15:00
Altura h (m)	4,2	0,6	4,2

a. Calcula D y A y escribe la función $h(t)$.
b. Comprueba que el periodo es de 12 horas y que se cumplen los datos de las 3:00 y de las 9:00.
c. Un barco necesita al menos 3 m de agua para entrar en el puerto. Resuelve $h(t) = 3$ y halla el intervalo de entrada.
d. ¿Cuántas horas dura la ventana de entrada en cada marea?

Ejercicio 17

Ejercicio 17 – La válvula de la rueda

Una ciclista de Pamplona recorre un tramo recto a 6,6 m/s. Su rueda tiene 33 cm de radio. La altura de la válvula sobre el suelo, partiendo de su punto más bajo, es $h(t) = 33 - 33\cos(20t)$ centímetros, con t en segundos, porque la rueda gira con velocidad angular $\omega = \frac{6{,}6}{0{,}33} = 20$ rad/s.

a. Calcula el periodo y el número de vueltas por segundo.
b. Calcula la altura máxima de la válvula y comprueba que coincide con el diámetro.
c. ¿En qué instantes de la primera vuelta la válvula está a 49,5 cm de altura?
d. Calcula la velocidad en km/h y comprueba que $6{,}6$ m/s equivale a 23,76 km/h.

Ejercicio 18

Ejercicio 18 – Ecuaciones de factorización

Resuelve en el intervalo $[0, 2\pi)$ y comprueba las soluciones.

a. $2\,\mathrm{sen}\,x\cos x - \cos x = 0$
b. $3\,\mathrm{tg}^2\,x - 1 = 0$

c. $2\cos^2 x + 3\,\mathrm{sen}\, x = 3$ (usa $\cos^2 x = 1 - \mathrm{sen}^2 x$)

Ejercicio 19

Ejercicio 19 – Suma de dos ondas

Dos ondas se superponen en un altavoz: $f(x) = \mathrm{sen}\, x$ y $g(x) = \cos x$, con $x \in [0, 2\pi]$. Queremos conocer cuándo coinciden y cómo es la onda suma.

a. Resuelve $f(x) = g(x)$ en $[0, 2\pi]$.
b. ¿En qué intervalo es $f(x) > g(x)$?
c. Comprueba que $\mathrm{sen}\, x + \cos x = \sqrt{2}\,\mathrm{sen}\left(x + \frac{\pi}{4}\right)$ para $x = 0$ y para $x = \frac{\pi}{4}$.
d. Deduce la amplitud y el máximo de la suma.

Ejercicio 20

Ejercicio 20 – Desafío: tres soluciones por vuelta

Resuelve en el intervalo $[0, 2\pi]$ la ecuación $\mathrm{sen}\, x + \mathrm{sen}\, 3x = 0$.

a. Usa $\mathrm{sen}\, 3x = 3\,\mathrm{sen}\, x - 4\,\mathrm{sen}^3 x$ para factorizar.
b. Obtén todas las soluciones en $[0, 2\pi]$.
c. Comprueba una de ellas sin usar la identidad.