Soluciones - Funciones y ecuaciones trigonométricas

Curso: 1 Bachillerato Ciencias

Solución del ejercicio 1

a. $\operatorname{sen} 0 = 0$, $\cos 0 = 1$, $\operatorname{tg} 0 = 0$. $\operatorname{sen} \frac{\pi}{6} = \frac{1}{2}$, $\cos \frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{2}$, $\operatorname{tg} \frac{\pi}{6} = \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3}$.
b. $\operatorname{sen} \frac{\pi}{4} = \cos \frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}$, $\operatorname{tg} \frac{\pi}{4} = 1$. $\operatorname{sen} \frac{\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2}$, $\cos \frac{\pi}{3} = \frac{1}{2}$, $\operatorname{tg} \frac{\pi}{3} = \sqrt{3}$.
c. $\operatorname{sen} \frac{\pi}{2} = 1$, $\cos \frac{\pi}{2} = 0$ (la tangente no existe). $\operatorname{sen} \pi = 0$, $\cos \pi = -1$, $\operatorname{tg} \pi = 0$.
d. $\operatorname{sen} \frac{3\pi}{2} = -1$, $\cos \frac{3\pi}{2} = 0$. La tangente es el cociente por el coseno, y no se puede dividir entre $\cos x = 0$; por eso hay asíntotas verticales en $x = \frac{\pi}{2} + k\pi$.

Solución del ejercicio 2

a. Aplicamos las fórmulas del enunciado. $y = \operatorname{sen} 2x$: $T = \frac{2\pi}{2} = \pi$. $y = \cos \frac{x}{2}$: $T = \frac{2\pi}{1/2} = 4\pi$. $y = \operatorname{tg} 3x$: $T = \frac{\pi}{3}$. Multiplicar x por un número mayor que 1 comprime la gráfica y acorta el periodo.
b. Seno y coseno: dominio $\mathbb{R}$ y recorrido $[-1, 1]$. Tangente: no está definida donde $\cos x = 0$, así que su dominio es $\mathbb{R} \setminus \{\frac{\pi}{2} + k\pi\}$, y su recorrido es $\mathbb{R}$.
c. $\operatorname{sen}(-x) = -\operatorname{sen} x$: impar. $\cos(-x) = \cos x$: par. $\operatorname{tg}(-x) = \dfrac{-\operatorname{sen} x}{\cos x} = -\operatorname{tg} x$: impar.
d. Por la periodicidad, $\operatorname{sen}(x + 2\pi) = \operatorname{sen} x = 0{,}6$. Por ser impar, $\operatorname{sen}(-x) = -0{,}6$.

Solución del ejercicio 3

a. Amplitud 3, periodo π, desfase 0, recorrido $[-3, 3]$.
b. Amplitud 2, periodo 2π, desfase $\frac{\pi}{3}$ a la derecha, recorrido $[-1, 3]$.
c. Amplitud 1 (el signo menos refleja la gráfica), periodo 4π, recorrido $[-1, 1]$.
d. Amplitud 1, periodo π, desfase $-\frac{\pi}{2}$ (a la izquierda), recorrido $[-3, -1]$.

Solución del ejercicio 4

a. Sustituimos los valores conocidos del seno (0, 1, 0, -1, 0): $y(0) = 2 \cdot 0 + 1 = 1$; $y\left(\frac{\pi}{2}\right) = 2 \cdot 1 + 1 = 3$; $y(\pi) = 1$; $y\left(\frac{3\pi}{2}\right) = -2 + 1 = -1$; $y(2\pi) = 1$.
b. El seno alcanza su máximo 1 en $\frac{\pi}{2}$ y su mínimo -1 en $\frac{3\pi}{2}$. Por tanto, la función tiene máximo $2 \cdot 1 + 1 = 3$ en $x = \frac{\pi}{2}$ y mínimo $2 \cdot (-1) + 1 = -1$ en $x = \frac{3\pi}{2}$.
c. Multiplicar por 2 estira la gráfica verticalmente (amplitud 2) y sumar 1 la

desplaza una unidad hacia arriba, de modo que la línea media pasa a ser $y = 1$. El periodo no cambia: sigue siendo 2π.

Solución del ejercicio 5

a. El ángulo agudo con seno $\frac{1}{2}$ es $\frac{\pi}{6}$. El seno también es positivo en el segundo cuadrante, así que la otra solución es $\pi - \frac{\pi}{6} = \frac{5\pi}{6}$. General: $x = \frac{\pi}{6} + 2k\pi$ o $x = \frac{5\pi}{6} + 2k\pi$.
b. El ángulo de referencia es $\frac{\pi}{4}$, y el coseno es negativo en el segundo y tercer cuadrante: $x = \pi - \frac{\pi}{4} = \frac{3\pi}{4}$ y $x = \pi + \frac{\pi}{4} = \frac{5\pi}{4}$. General: $\frac{3\pi}{4} + 2k\pi$ o $\frac{5\pi}{4} + 2k\pi$.
c. $\operatorname{tg} \frac{\pi}{3} = \sqrt{3}$, y la tangente se repite cada π: $x = \frac{\pi}{3}$ y $x = \frac{4\pi}{3}$. General: $x = \frac{\pi}{3} + k\pi$.
d. No tiene solución: el seno solo toma valores en $[-1, 1]$ y $\frac{3}{2} > 1$.

Solución del ejercicio 6

a. Con $t = \cos x$ queda $2t^2 - t - 1 = 0$, cuyas soluciones son $t = \frac{1 \pm 3}{4}$, es decir, $t = 1$ o $t = -\frac{1}{2}$. Deshacemos el cambio: $\cos x = 1$ da $x = 0$; $\cos x = -\frac{1}{2}$ da $x = \frac{2\pi}{3}$ y $x = \frac{4\pi}{3}$.
b. $\operatorname{tg}^2 x = 3$, luego $\operatorname{tg} x = \pm\sqrt{3}$. Para $\sqrt{3}$: $\frac{\pi}{3}$ y $\frac{4\pi}{3}$. Para $-\sqrt{3}$: $\frac{2\pi}{3}$ y $\frac{5\pi}{3}$. Son cuatro soluciones.
c. Con $t = \operatorname{sen} x$: $2t^2 - 3t + 1 = 0$, con $t = \frac{3 \pm 1}{4}$, es decir, $t = 1$ o $t = \frac{1}{2}$. $\operatorname{sen} x = 1$ da $x = \frac{\pi}{2}$; $\operatorname{sen} x = \frac{1}{2}$ da $x = \frac{\pi}{6}$ y $x = \frac{5\pi}{6}$.

Solución del ejercicio 7

a. Usamos $\operatorname{sen} 2x = 2 \operatorname{sen} x \cos x$ y pasamos todo a un miembro: $2 \operatorname{sen} x \cos x - \operatorname{sen} x = 0$. Sacamos factor común: $\operatorname{sen} x(2 \cos x - 1) = 0$. Entonces $\operatorname{sen} x = 0$ ($x = 0, \pi$) o $\cos x = \frac{1}{2}$ ($x = \frac{\pi}{3}, \frac{5\pi}{3}$).
b. Escribimos $\frac{\operatorname{sen} x}{\cos x} = 2 \operatorname{sen} x$ y multiplicamos por $\cos x \neq 0$: $\operatorname{sen} x = 2 \operatorname{sen} x \cos x$, es decir, $\operatorname{sen} x(1 - 2 \cos x) = 0$. Soluciones: $x = 0, \pi$ y $x = \frac{\pi}{3}, \frac{5\pi}{3}$; en ninguna el coseno vale 0, así que todas son válidas.
c. $\operatorname{sen} \frac{2\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2} \approx 0{,}866$ y $\operatorname{sen} \frac{\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2} \approx 0{,}866$: coinciden.

Solución del ejercicio 8

a. Si $x \in [0, 2\pi)$, entonces $2x \in [0, 4\pi)$: hay que dar dos vueltas. Las soluciones de $\operatorname{sen} u = \frac{\sqrt{3}}{2}$ son $u = \frac{\pi}{3}, \frac{2\pi}{3}$ y, sumando 2π, $\frac{7\pi}{3}, \frac{8\pi}{3}$. Dividiendo entre 2: $x = \frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{3}, \frac{7\pi}{6}, \frac{4\pi}{3}$.
b. Ahora $3x \in [0, 6\pi)$, tres vueltas. $\cos u = \frac{1}{2}$ da $u = \frac{\pi}{3}, \frac{5\pi}{3}$ en cada vuelta:

$3x = \frac{\pi}{3}, \frac{5\pi}{3}, \frac{7\pi}{3}, \frac{11\pi}{3}, \frac{13\pi}{3}, \frac{17\pi}{3}$. Luego $x = \frac{\pi}{9}, \frac{5\pi}{9}, \frac{7\pi}{9}, \frac{11\pi}{9}, \frac{13\pi}{9}, \frac{17\pi}{9}$.

c. Cuatro soluciones: el periodo de $\operatorname{sen} 2x$ es π, de modo que en $[0, 2\pi)$ caben dos periodos y cada periodo aporta dos soluciones.

Solución del ejercicio 9

a. Máximo $8 + 7 = 15$ m, mínimo $8 - 7 = 1$ m, periodo $T = \frac{2\pi}{\pi/15} = 30$ s.

b. $h(10) = 8 - 7\cos\frac{2\pi}{3} = 8 - 7 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) = 11{,}5$ m.

c. $8 - 7\cos\frac{\pi t}{15} = 12 \Rightarrow \cos\frac{\pi t}{15} = -\frac{4}{7}$. Un ángulo es $\arccos\left(-\frac{4}{7}\right) \approx 2{,}179$ rad, luego $t \approx 10{,}40$ s. El otro es $2\pi - 2{,}179$, luego $t = 30 - 10{,}40 \approx 19{,}60$ s.

d. El 8 es la altura del centro de la noria (1 m del suelo más el radio de 7 m) y el 7 es el radio, es decir, la amplitud de la oscilación.

Solución del ejercicio 10

a. Máximo 4 m, mínimo 1 m, periodo $\frac{2\pi}{\pi/6} = 12$ h.

b. $h(3) = 2{,}5 + 1{,}5\operatorname{sen}\frac{\pi}{2} = 4$ m (pleamar) y $h(9) = 2{,}5 - 1{,}5 = 1$ m (bajamar).

c. $\operatorname{sen}\frac{\pi t}{6} = \frac{0{,}75}{1{,}5} = \frac{1}{2} \Rightarrow \frac{\pi t}{6} = \frac{\pi}{6}$ o $\frac{5\pi}{6}$, luego $t = 1$ y $t = 5$.

d. El nivel supera 3,25 m si $\operatorname{sen}\frac{\pi t}{6} > \frac{1}{2}$, es decir, entre la 1:00 y las 5:00. La ventana dura 4 horas.

Solución del ejercicio 11

a. Mínimo $15 - 8 = 7$ °C cuando $\cos = 1$, es decir, $t = 3$ (3:00). Máximo $15 + 8 = 23$ °C cuando $\cos = -1$, es decir, $t = 15$ (15:00).

b. $T(12) = 15 - 8\cos\frac{9\pi}{12} = 15 - 8\cos\frac{3\pi}{4} = 15 - 8 \cdot \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right) \approx 20{,}7$ °C.

c. $15 - 8\cos u > 19 \Rightarrow \cos u$ con $u = \frac{\pi(t-3)}{12}$. Entonces $t - 3 \in (8, 16)$, es decir, entre las 11:00 y las 19:00.

d. La media es 15 °C, el valor de la línea media D, porque el coseno oscila simétricamente.

Solución del ejercicio 12

a. Amplitud 5 cm; periodo $\frac{2\pi}{4\pi} = 0{,}5$ s; frecuencia $f = \frac{1}{0{,}5} = 2$ Hz.

b. $x(0{,}1) = 5\cos(0{,}4\pi) \approx 5 \cdot 0{,}309 = 1{,}545$ cm.

c. $\cos 4\pi t = 0 \Rightarrow 4\pi t = \frac{\pi}{2} \Rightarrow t = 0{,}125$ s.

d. En cada periodo (0,5 s) pasa 2 veces por $x = 0$; en 2 s hay 4 periodos, luego 8 pasos por el equilibrio.

Solución del ejercicio 13

a. Amplitud $0{,}8$; periodo $T = \frac{2\pi}{2\pi \cdot 440} = \frac{1}{440} \approx 0{,}00227$ s; frecuencia 440 Hz.
b. Con frecuencia 880 Hz: $p_2(t) = 0{,}8\,\operatorname{sen}(2\pi \cdot 880\,t)$ y periodo $\frac{1}{880}$ s, la mitad.
c. $2\pi \cdot 440 \cdot \frac{1}{1\,760} = \frac{\pi}{2}$, luego $p = 0{,}8 \cdot 1 = 0{,}8$.
d. Estira la gráfica verticalmente: las ondas son más altas pero el periodo no cambia. El sonido tiene el mismo tono (la misma nota) y suena más fuerte.

Solución del ejercicio 14

a. Máximo $12 + 2{,}5 = 14{,}5$ h, mínimo $9{,}5$ h, periodo 365 días.
b. $L(80) = 12$ h (equinoccio de primavera); $L(172) \approx 14{,}5$ h (solsticio de verano, máximo); $L(355) \approx 9{,}5$ h (solsticio de invierno, mínimo).
c. $\operatorname{sen}\theta > 0{,}4$ si $\theta \in (0{,}4115;\ 2{,}730)$ con $\theta = \frac{2\pi(d-80)}{365}$. La longitud de ese intervalo es $\pi - 2 \cdot 0{,}4115 = 2{,}319$ rad, y $\frac{2{,}319}{2\pi} \cdot 365 \approx 135$ días (aproximadamente del día 104 al 239).
d. La amplitud A sería mayor (más diferencia entre verano e invierno), por ejemplo $A = 3{,}5$; la línea media seguiría en 12.

Solución del ejercicio 15

a. La línea media está a mitad de camino entre el máximo y el mínimo: $D = \frac{5+(-1)}{2} = 2$. La amplitud es la mitad de la distancia entre ellos: $A = \frac{5-(-1)}{2} = 3$.
b. El periodo de $\operatorname{sen}(Bx)$ es $\frac{2\pi}{B}$. Igualando a π: $\frac{2\pi}{B} = \pi$, luego $B = 2$.
c. La función es $f(x) = 3\operatorname{sen} 2x + 2$. Comprobación: $f(0) = 3 \cdot 0 + 2 = 2$. Como $A = 3 > 0$, el seno empieza creciendo, como se pedía.
d. $f\left(\frac{\pi}{4}\right) = 3\operatorname{sen}\frac{\pi}{2} + 2 = 3 + 2 = 5$, el máximo, y $f\left(\frac{3\pi}{4}\right) = 3\operatorname{sen}\frac{3\pi}{2} + 2 = -3 + 2 = -1$, el mínimo, separados medio periodo.

Solución del ejercicio 16

a. $D = \frac{4{,}2+0{,}6}{2} = 2{,}4$ y $A = \frac{4{,}2-0{,}6}{2} = 1{,}8$. Luego $h(t) = 2{,}4 + 1{,}8\cos\frac{\pi(t-3)}{6}$.
b. Periodo $\frac{2\pi}{\pi/6} = 12$ h. $h(3) = 2{,}4 + 1{,}8 = 4{,}2$ m y $h(9) = 2{,}4 + 1{,}8\cos\pi = 0{,}6$ m. Se cumplen los datos.
c. $2{,}4 + 1{,}8\cos u = 3 \Rightarrow \cos u = \frac{1}{3} \Rightarrow u = \pm 1{,}231$ con $u = \frac{\pi(t-3)}{6}$. Entonces $t - 3 = \pm 2{,}351$ y $t \approx 0{,}65$ o $t \approx 5{,}35$. Puede entrar entre las 0:39 y las 5:21.
d. La ventana dura $5{,}35 - 0{,}65 \approx 4{,}70$ horas, es decir, unas 4 h 42 min.

Solución del ejercicio 17

a. El periodo de $\cos(20t)$ es $T = \frac{2\pi}{20} = \frac{\pi}{10} \approx 0{,}314$ s: es lo que tarda la rueda en dar una vuelta. Vueltas por segundo: $\frac{1}{T} = \frac{10}{\pi} \approx 3{,}18$.
b. La altura es máxima cuando $\cos 20t = -1$: $h = 33 + 33 = 66$ cm, que es el diámetro de la rueda ($2 \cdot 33$), como corresponde al punto más alto.
c. $33 - 33\cos 20t = 49{,}5$ da $\cos 20t = -\frac{16{,}5}{33} = -\frac{1}{2}$. En la primera vuelta, $20t = \frac{2\pi}{3}$ o $\frac{4\pi}{3}$. Entonces $t = \frac{\pi}{30} \approx 0{,}105$ s o $t = \frac{\pi}{15} \approx 0{,}209$ s.
d. Un metro por segundo son 3,6 km/h (3 600 s entre 1 000 m): $6{,}6 \cdot 3{,}6 = 23{,}76$ km/h.

Solución del ejercicio 18

a. Sacamos factor común $\cos x$: $\cos x(2\operatorname{sen} x - 1) = 0$. Entonces $\cos x = 0$ ($x = \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}$) o $\operatorname{sen} x = \frac{1}{2}$ ($x = \frac{\pi}{6}, \frac{5\pi}{6}$). Comprobación con $\frac{\pi}{6}$: $2 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2} = 0$ ✓.
b. $\operatorname{tg}^2 x = \frac{1}{3}$, luego $\operatorname{tg} x = \pm\frac{1}{\sqrt{3}}$. El ángulo de referencia es $\frac{\pi}{6}$, y hay una solución en cada cuadrante: $\frac{\pi}{6}, \frac{5\pi}{6}, \frac{7\pi}{6}, \frac{11\pi}{6}$.
c. Sustituimos $\cos^2 x = 1 - \operatorname{sen}^2 x$: $2 - 2\operatorname{sen}^2 x + 3\operatorname{sen} x = 3$, es decir, $2\operatorname{sen}^2 x - 3\operatorname{sen} x + 1 = 0$. Con $t = \operatorname{sen} x$: $t = 1$ o $t = \frac{1}{2}$. Soluciones: $\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{6}, \frac{5\pi}{6}$.

Solución del ejercicio 19

a. $\operatorname{sen} x = \cos x \Rightarrow \operatorname{tg} x = 1 \Rightarrow x = \frac{\pi}{4}$ o $x = \frac{5\pi}{4}$.
b. Estudiando un valor de cada tramo: en $x = \frac{\pi}{2}$, $1 > 0$; luego $f > g$ en $\left(\frac{\pi}{4}, \frac{5\pi}{4}\right)$.
c. Para $x = 0$: $0 + 1 = 1$ y $\sqrt{2}\operatorname{sen}\frac{\pi}{4} = \sqrt{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = 1$. Para $x = \frac{\pi}{4}$: $\sqrt{2}$ y $\sqrt{2}\operatorname{sen}\frac{\pi}{2} = \sqrt{2}$.
d. La amplitud de la suma es $\sqrt{2} \approx 1{,}41$ y el máximo vale $\sqrt{2}$, mayor que cada onda por separado.

Solución del ejercicio 20

a. Sustituimos la identidad: $\operatorname{sen} x + 3\operatorname{sen} x - 4\operatorname{sen}^3 x = 4\operatorname{sen} x - 4\operatorname{sen}^3 x$. Sacamos factor común $4\operatorname{sen} x$: $4\operatorname{sen} x(1 - \operatorname{sen}^2 x) = 4\operatorname{sen} x \cos^2 x$. La ecuación queda $4\operatorname{sen} x \cos^2 x = 0$.
b. Un producto es nulo si lo es algún factor. $\operatorname{sen} x = 0$ da $x = 0, \pi, 2\pi$ (el intervalo es cerrado). $\cos x = 0$ da $x = \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}$. En total, cinco soluciones: 0, $\frac{\pi}{2}$, π, $\frac{3\pi}{2}$, 2π.
c. Para $x = \frac{\pi}{2}$: $\operatorname{sen}\frac{\pi}{2} + \operatorname{sen}\frac{3\pi}{2} = 1 + (-1) = 0$ ✓, sin necesidad de la identidad.