Soluciones del examen - Funciones elementales

Curso: 1 Bachillerato Ciencias · Duración: 55 minutos · /20

Solución del ejercicio 1 (3 puntos)

a. En f el radicando debe ser no negativo: $3x+6 \geq 0$, es decir, $x \geq -2$; dominio $[-2, +\infty)$. En g el denominador no puede anularse: $x^2 - 9 = 0$ para $x = \pm 3$; dominio $\mathbb{R} \setminus \{-3, 3\}$.
b. El argumento del logaritmo debe ser positivo: $x - 2 > 0$, luego $x > 2$; dominio $(2, +\infty)$. Cuando $x \to 2^+$, $\ln(x-2) \to -\infty$, así que hay asíntota vertical $x = 2$.
c. Sustituimos: $k(-1) = 2^{-1} - 1 = \frac{1}{2} - 1 = -\frac{1}{2}$ y $k(3) = 2^3 - 1 = 8 - 1 = 7$. Recuerda que $2^{-1} = \frac{1}{2}$: un exponente negativo indica el inverso.

Solución del ejercicio 2 (4 puntos)

a. Abscisa del vértice: $x_v = -\dfrac{b}{2a} = \dfrac{6}{2} = 3$, y $f(3) = 9 - 18 + 5 = -4$. Vértice $(3, -4)$; eje de simetría $x = 3$.
b. Eje OY: $f(0) = 5$, punto $(0, 5)$. Eje OX: $x^2 - 6x + 5 = 0$, con soluciones $x = 1$ y $x = 5$, puntos $(1, 0)$ y $(5, 0)$, simétricos respecto de $x = 3$.
c. Como $a = 1 > 0$, la parábola se abre hacia arriba y el vértice es un mínimo: recorrido $[-4, +\infty)$. Decrece en $(-\infty, 3)$ y crece en $(3, +\infty)$.
d. $f(x-1)$ desplaza la gráfica 1 unidad a la derecha y el $+2$, 2 unidades hacia arriba. El vértice pasa de $(3, -4)$ a $(4, -2)$.

Solución del ejercicio 3 (4 puntos)

a. El denominador se anula en $x = -2$, así que el dominio es $\mathbb{R} \setminus \{-2\}$. Como el numerador vale $-7 \neq 0$ en ese punto, hay asíntota vertical $x = -2$.
b. Numerador y denominador tienen el mismo grado: $\lim_{x \to \pm\infty} f(x) = \frac{3}{1} = 3$. Asíntota horizontal $y = 3$.
c. Eje OY: $f(0) = \frac{-1}{2} = -\frac{1}{2}$, punto $\left(0, -\frac{1}{2}\right)$. Eje OX: $3x - 1 = 0$, $x = \frac{1}{3}$, punto $\left(\frac{1}{3}, 0\right)$.
d. $3 - \dfrac{7}{x+2} = \dfrac{3(x+2) - 7}{x+2} = \dfrac{3x - 1}{x+2}$. Como $\frac{7}{x+2}$ nunca vale 0, f nunca toma el valor 3: recorrido $\mathbb{R} \setminus \{3\}$.

Solución del ejercicio 4 (4 puntos)

a. $(f \circ g)(x) = f(g(x)) = 3(x^2+1) - 2 = 3x^2 + 1$. En el otro orden, $(g \circ f)(x) = g(3x-2) = (3x-2)^2 + 1 = 9x^2 - 12x + 5$. Son distintas: la composición no es conmutativa. Para calcular $f \circ g$ se aplica primero g y después f.

b. $(f \circ g)(2) = 3 \cdot 4 + 1 = 13$. También: $g(2) = 5$ y $f(5) = 13$. Ambas vías dan el mismo resultado, como debe ocurrir.

c. Despejamos x en $y = 3x - 2$: $x = \frac{y+2}{3}$. Intercambiando las variables, $f^{-1}(x) = \dfrac{x+2}{3}$. Comprobación: $f\left(\frac{x+2}{3}\right) = 3 \cdot \frac{x+2}{3} - 2 = (x+2) - 2 = x$. Además $f^{-1}(f(x)) = \frac{(3x-2)+2}{3} = x$. Las gráficas de f y f^{-1} son simétricas respecto de la bisectriz $y = x$.

Solución del ejercicio 5 (5 puntos)

a. $A(t) = 1 + 0{,}15t$, $B(t) = 0{,}25t$ y $C(t) = 6 + 0{,}05t$. Las tres son funciones afines: término fijo más precio por minuto.

b. $A = B$: $1 + 0{,}15t = 0{,}25t \Rightarrow t = 10$ min, coste $2{,}50$ €. $A = C$: $1 + 0{,}15t = 6 + 0{,}05t \Rightarrow 0{,}1t = 5 \Rightarrow t = 50$ min, coste $8{,}50$ €.

c. Para $t < 10$ conviene B; para $10 < t < 50$ conviene A; para $t > 50$ conviene C (la que tiene el menor coste por minuto). En $t = 10$ cuestan igual A y B, y en $t = 50$, A y C.

d. $A(70) = 11{,}50$ €, $B(70) = 17{,}50$ € y $C(70) = 9{,}50$ €. Conviene la opción C. Respuesta: para 70 minutos conviene C, que ahorra 2 € respecto de A.