Apuntes - Funciones elementales

Curso: 1 Bachillerato Ciencias

En este tema aprenderás: concepto de función, dominio y recorrido, funciones elementales, transformaciones de gráficas y simetrías, composición e inversa. Cada idea va en un cuadro de color, con ejemplos resueltos paso a paso.

Actividad de introducción: la tarifa del taxi

Un taxi de Madrid cobra 3,50 € por subir y 1,10 € por cada kilómetro recorrido. Si llamamos x a los kilómetros, el precio es $f(x) = 3{,}5 + 1{,}1x$. Esta regla asigna a cada valor de x un único precio, y esa es la idea de función. Observa la tabla: cada kilómetro suma siempre lo mismo, por eso su gráfica es una recta.

Kilómetros x	0	2	5	10
Precio f(x) (€)	3,50	5,70	9,00	14,50

Pero la realidad es más rica: algunos taxis cobran menos por kilómetro después de cierta distancia, y otras relaciones, como la altura de un balón, el crecimiento de una población o el coste medio de fabricar un producto, no son rectas sino parábolas, curvas con asíntotas o exponenciales. En este tema aprenderás a reconocer las familias de funciones elementales, a calcular su dominio y a transformar sus gráficas para describir situaciones reales.

Concepto de función, dominio y recorrido

Definición: función

Una **función** $f : A \to \mathbb{R}$ asigna a cada x de su **dominio** un único valor $f(x)$. El dominio $\mathrm{Dom}\, f$ es el conjunto de valores de x para los que se puede calcular; el **recorrido** es el conjunto de valores que toma f. Para hallar el dominio de una fórmula hay que excluir:

- los valores que anulan un **denominador**;
- los valores que hacen negativo el radicando de una **raíz de índice par**;
- los valores que hacen no positivo el argumento de un **logaritmo**.

Ejemplo 1

$f(x) = \frac{x+1}{x^2-x-6}$

$x^2 - x - 6 = (x-3)(x+2)$, luego $\mathrm{Dom}\, f = \mathbb{R} \setminus \{-2, 3\}$. Y $g(x) = \sqrt{x^2 - 9}$:
$x^2 \geq 9 \Rightarrow \mathrm{Dom}\, g = (-\infty, -3] \cup [3, +\infty)$.

Cómo se hace: calcular el dominio de una función

1. Polinomios: el dominio es $\mathbb{R}$.
2. Cocientes: excluye los ceros del denominador.
3. Raíces de índice par: exige radicando ≥ 0.
4. Logaritmos: exige argumento > 0. Combina las condiciones.

Ejemplo 2: dominio con raíz y cociente

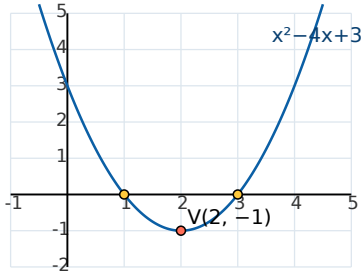
Halla el dominio de $f(x) = \frac{\sqrt{x-1}}{x-4}$.

Se exige $x - 1 \geq 0$, es decir, $x \geq 1$, y $x \neq 4$. Entonces $\mathrm{Dom}\, f = [1, 4) \cup (4, +\infty)$.

Funciones elementales

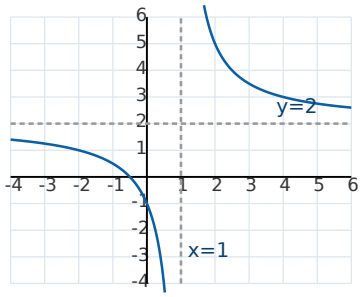
Propiedad

Polinómicas. La recta $y = mx + n$ y la parábola $y = ax^2 + bx + c$, cuyo **vértice** está en $x = -\frac{b}{2a}$. Para $y = x^2 - 4x + 3$: vértice $(2, -1)$, cortes con el eje X en $x = 1$ y $x = 3$, corte con el eje Y en $y = 3$; decrece en $(-\infty, 2)$, crece en $(2, +\infty)$, y su recorrido es $[-1, +\infty)$.



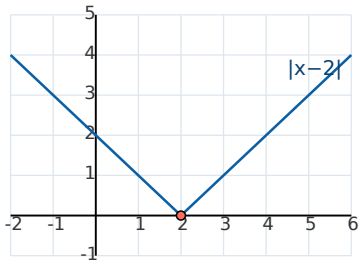
Propiedad

Racionales. $y = \frac{P(x)}{Q(x)}$ tiene **asíntotas verticales** en las raíces de Q que no anulan P; la asíntota horizontal depende de los grados. Para $y = \frac{2x+1}{x-1}$: asíntota vertical $x = 1$ y horizontal $y = 2$.



Propiedad

Valor absoluto y funciones a trozos. $|x-2|$ vale $x-2$ si $x \geq 2$ y $2-x$ si x. Su gráfica tiene forma de V con vértice en $(2,0)$. Una función definida a trozos usa fórmulas distintas en intervalos distintos.



Transformaciones de gráficas

Observación

A partir de la gráfica de f: $f(x)+k$ la desplaza k unidades en vertical; $f(x-h)$ la desplaza h en horizontal (a la derecha si $h>0$); $-f(x)$ la refleja respecto del eje X; $f(-x)$ la refleja respecto del eje Y; $a\,f(x)$ la estira verticalmente. Así, $(x+2)^2-3$ es la parábola x^2 desplazada 2 a la izquierda y 3 abajo, con vértice en $(-2,-3)$.

Ejemplo 3: transformación de una parábola

Describe cómo se obtiene la gráfica de $g(x)=(x-2)^2+1$ a partir de $f(x)=x^2$.

Es la parábola $y=x^2$ desplazada 2 unidades a la derecha y 1 hacia arriba. Su vértice es $(2,1)$.

Simetrías, composición e inversa

Propiedad

f es **par** si $f(-x)=f(x)$ (simetría respecto del eje Y) e **impar** si $f(-x)=-f(x)$ (simetría respecto del origen). Por ejemplo, x^4-3x^2 es par, x^3-x es impar y x^2+x no es ni lo uno ni lo otro.

Propiedad

La **composición** $(g\circ f)(x)=g(f(x))$ aplica primero f y luego g. Con $f(x)=x+1$ y $g(x)=x^2$: $(g\circ f)(x)=(x+1)^2$ y $(f\circ g)(x)=x^2+1$; en general no coinciden. La **función inversa** f^{-1} deshace f: se despeja x en $y=f(x)$ y se intercambian las variables. Para $f(x)=2x-6$: $x=\frac{y+6}{2}$, luego $f^{-1}(x)=\frac{x+6}{2}$. Las gráficas de f y f^{-1} son simétricas respecto de la recta $y=x$. Una función solo tiene inversa si es inyectiva.

Ejemplo 4: composición e inversa

Con $f(x)=2x+1$ y $g(x)=x^2$, calcula $f\circ g$, $g\circ f$ y f^{-1}.

$(f\circ g)(x)=f(g(x))=2x^2+1$ y $(g\circ f)(x)=(2x+1)^2$. Para la inversa, se despeja en $y=2x+1$: $x=\frac{y-1}{2}$, luego $f^{-1}(x)=\frac{x-1}{2}$. La composición no es conmutativa.

¡Atención! Errores frecuentes

- Olvidar que el dominio de $\sqrt{}$ exige radicando ≥ 0, pero el de un denominador exige $\neq 0$.
- Confundir $f(x+2)$ (desplaza a la izquierda) con $f(x)+2$ (desplaza hacia arriba).
- Escribir $f^{-1}(x)=\frac{1}{f(x)}$: la inversa no es el inverso.
- Suponer que $g\circ f=f\circ g$.

Funciones definidas a trozos y valor absoluto

Definición: función definida a trozos

Una función está **definida a trozos** cuando su expresión cambia según el intervalo en el que se encuentre x. Por ejemplo, el **valor absoluto** $|x|$ vale x si $x\geq 0$ y vale $-x$ si x. Para representarla se dibuja cada trozo en su intervalo y se marca con un punto relleno (cierra) o vacío (abre) el extremo de cada tramo.

Cómo se hace: estudiar una función a trozos

1. Identifica los intervalos y la expresión de cada uno.
2. Calcula las imágenes en los extremos de cada intervalo con las dos expresiones.
3. Si las dos imágenes coinciden en el extremo, los trozos se unen (continuidad); si no, hay un salto.
4. Dibuja cada trozo y comprueba que el dominio completo queda cubierto.

Ejemplo 5

Representa *f(x)=\begin{cases}x+2&\text{si }}x* y estudia su continuidad en $x=1$.

El primer trozo es una recta de pendiente 1: pasa por $(0,2)$ y se acerca a $(1,3)$ sin llegar. El segundo es una recta de pendiente -1: pasa por $(1,3)$ y por $(4,0)$. Al acercarnos a $x=1$ por la izquierda $f\to 3$ y $f(1)=4-1=3$: coinciden, así que la función es continua y su gráfica tiene forma de pico con vértice en $(1,3)$.

Propiedades globales: monotonía, extremos y acotación

Definición: monotonía, extremos y acotación

Una función es **creciente** en un intervalo si al aumentar x aumenta $f(x)$, y **decreciente** si disminuye. Un **máximo relativo** es un punto cuya imagen es mayor que la de los puntos próximos; un **mínimo relativo** es lo contrario. Si la imagen es la mayor de todo el dominio, el extremo es **absoluto**. Una función está **acotada superiormente** si existe un número que es mayor o igual que todas sus imágenes, e **inferiormente** en el caso contrario. Una función es **periódica** si repite sus valores cada cierto intervalo de longitud T.

Ejemplo 6

Estudia la monotonía y los extremos de $f(x) = x^2 - 6x + 5$.

El vértice está en $x = 3$ y $f(3) = -4$. Como la parábola se abre hacia arriba, decrece en $(-\infty, 3)$ y crece en $(3, +\infty)$. Hay un mínimo absoluto de valor -4 en $x = 3$ y no hay máximo. Está acotada inferiormente por -4 pero no superiormente.

Funciones racionales y asíntotas

Cómo se hace: hallar las asíntotas de una función racional

1. Calcula el dominio: los ceros del denominador son los candidatos a asíntota vertical.
2. Comprueba que en cada uno de esos valores el numerador no se anula; si se anula, simplifica la fracción y revisa.
3. Calcula $\lim_{x \to \pm\infty} f(x)$: si es un número L, la recta $y = L$ es una asíntota horizontal.
4. Calcula los cortes con los ejes y el signo de la función para dibujar cada rama.

Propiedad: la hipérbola

La función $f(x) = \dfrac{k}{x - a} + b$ tiene como gráfica una **hipérbola** con asíntota vertical $x = a$ y asíntota horizontal $y = b$. Si $k > 0$ las dos ramas están en el primer y tercer cuadrante respecto de las asíntotas; si k, en el segundo y cuarto. Cualquier función $\frac{ax+b}{cx+d}$ con $c \neq 0$ se puede escribir así dividiendo.

Ejemplo 7

Escribe $f(x) = \dfrac{3x + 5}{x + 1}$ como hipérbola y halla sus asíntotas.

Dividimos: $3x+5=3(x+1)+2$, de modo que $f(x)=3+\dfrac{2}{x+1}$. La asíntota vertical es $x=-1$ y la horizontal es $y=3$. Como $k=2>0$, las ramas están a la derecha y arriba, y a la izquierda y abajo, de las asíntotas.

Comparar modelos: lineal, cuadrático y exponencial

Propiedad: ritmos de crecimiento

Una función afín $y=mx+n$ suma siempre la misma cantidad m cuando x aumenta una unidad. Una función exponencial $y=a\cdot b^x$ con $b>1$ multiplica siempre por el mismo factor b y acaba superando a cualquier función lineal o cuadrática. La parábola está en medio: su crecimiento es mayor que el lineal, pero menor que el exponencial. Para decidir qué modelo ajusta unos datos se mira si las *diferencias* entre valores consecutivos son constantes (lineal) o si lo son los *cocientes* (exponencial).

Ejemplo 8

Los valores $2,\ 6,\ 18,\ 54$ corresponden a $x=0,1,2,3$. ¿Qué modelo siguen?

Las diferencias son $4,\ 12,\ 36$, no constantes, así que no es lineal. Los cocientes son $\frac{6}{2}=\frac{18}{6}=\frac{54}{18}=3$: constantes. Es exponencial, $y=2\cdot 3^x$.

¡Atención! errores frecuentes con la notación

No confundas $f(x)^2$ con $f(x^2)$, ni $f^{-1}(x)$ con $\frac{1}{f(x)}$: la inversa es otra función, no el inverso multiplicativo. Tampoco son lo mismo $f\circ g$ y $g\circ f$. Y recuerda que, en una composición, se aplica primero la función que está más cerca de x.

¿Sabías que? Nombrar una función

La notación $f(x)$ para indicar que f depende de x la popularizó Leonhard Euler en el siglo XVIII. Antes, los matemáticos describían las relaciones con frases largas. Hoy la usamos para todo, desde la física hasta el diseño de videojuegos. El concepto moderno de función como correspondencia entre conjuntos, sin necesidad de fórmula, llegó en el siglo XIX con Dirichlet.

El consejo de Otto

Para el dominio de una función compuesta, mira primero el de la función interior y luego exige que el resultado entre en el dominio de la exterior.