Ejercicios - Funciones elementales

Curso: 1 Bachillerato Ciencias · 20

Se debe mostrar el desarrollo de cada ejercicio.

Ejercicio 1

Ejercicio 1 – Dominio de una función

El dominio de una función es el conjunto de valores de x para los que se puede calcular $f(x)$. Recuerda tres prohibiciones: no se divide entre cero, no se hace la raíz cuadrada de un número negativo y no se hace el logaritmo de un número menor o igual que cero.

a. $f(x) = \dfrac{x+1}{x^2-4}$
b. $g(x) = \sqrt{2x-6}$
c. $h(x) = \ln(5-x)$
d. $k(x) = \dfrac{\sqrt{x^2-9}}{x-4}$

Ejercicio 2

Ejercicio 2 – Tabla de valores y vértice

Sea $f(x) = x^2 - 4x + 3$. Vamos a estudiarla con una tabla de valores y con la fórmula del vértice $x_v = -\frac{b}{2a}$.

a. Calcula $f(-1)$, $f(0)$, $f(2)$ y $f(5)$.
b. Halla el vértice y el eje de simetría.
c. Calcula los puntos de corte con los ejes.
d. Escribe el recorrido y los intervalos de crecimiento.

Ejercicio 3

Ejercicio 3 – Recta por dos puntos

La gráfica de una función afín pasa por los puntos $A(-1, 5)$ y $B(3, -3)$.

a. Calcula la pendiente y escribe la ecuación $y = mx + n$.
b. Halla los puntos de corte con los ejes.
c. ¿Pertenece el punto $(5, -7)$ a la recta? ¿Es creciente o decreciente?

Ejercicio 4

Ejercicio 4 – Una parábola abierta hacia abajo

Estudia la función $f(x) = -x^2 + 4x + 5$ siguiendo el método de la parábola.

a. Halla el vértice y el eje de simetría.
b. Calcula los puntos de corte con los ejes.
c. Indica el dominio, el recorrido, el máximo y los intervalos de monotonía.
d. Comprueba la simetría calculando $f(1)$ y $f(3)$.

Ejercicio 5

Ejercicio 5 – Función racional con asíntotas

Sea $f(x) = \dfrac{2x+1}{x-3}$. Aplica el método de las asíntotas.

a. Calcula el dominio y la asíntota vertical.
b. Calcula la asíntota horizontal con $\lim_{x\to\infty} f(x)$.
c. Halla los cortes con los ejes.
d. Comprueba que $f(x) = 2 + \dfrac{7}{x-3}$ y deduce el recorrido.

Ejercicio 6

Ejercicio 6 – Exponencial y logaritmo

Las funciones $f(x) = 2^x$ y $g(x) = \log_2 x$ son inversas una de la otra.

a. Calcula $f(-2)$, $f(0)$ y $f(3)$.
b. Calcula $g\left(\frac{1}{4}\right)$, $g(1)$ y $g(8)$.
c. Indica el dominio, el recorrido y la asíntota de cada una.
d. Comprueba que $g(f(5)) = 5$ y que $f(g(7)) = 7$.

Ejercicio 7

Ejercicio 7 – Transformaciones de gráficas

Partimos de la parábola $y = x^2$ y del valor absoluto $y = |x|$. Describe cómo se transforma cada gráfica y da el vértice y el recorrido.

a. $g(x) = (x-2)^2 + 1$
b. $h(x) = -x^2 + 3$
c. $k(x) = |x+1| - 3$
d. $m(x) = 2|x|$

Ejercicio 8

Ejercicio 8 – Funciones pares e impares

Una función es **par** si $f(-x) = f(x)$ (simetría respecto del eje OY) e **impar** si

$f(-x) = -f(x)$ (simetría respecto del origen). Clasifica:

a. $f(x) = x^4 - 3x^2$
b. $g(x) = x^3 + x$
c. $h(x) = x^2 + x$
d. $k(x) = \dfrac{x^3}{x^2 + 1}$

Ejercicio 9

Ejercicio 9 – Composición de funciones

Sean $f(x) = 2x + 1$, $g(x) = x^2$ y $h(x) = \sqrt{x}$. Recuerda que $(f \circ g)(x) = f(g(x))$: primero se aplica g y después f.

a. Calcula $(f \circ g)(x)$ y $(g \circ f)(x)$.
b. Calcula ambas composiciones en $x = 2$.
c. ¿Es conmutativa la composición? Razónalo con los resultados.
d. Calcula $(h \circ f)(x)$ e indica su dominio.

Ejercicio 10

Ejercicio 10 – Función inversa

Para hallar la inversa de $y = f(x)$ se despeja x y se intercambian los nombres de las variables. Sus gráficas son simétricas respecto de la recta $y = x$.

a. Halla la inversa de $f(x) = \dfrac{3x - 2}{5}$ y comprueba que $f(f^{-1}(x)) = x$.
b. Halla la inversa de $g(x) = x^3 + 1$.
c. ¿Tiene inversa $h(x) = x^2$ en todo $\mathbb{R}$? ¿Y restringida a $[0, +\infty)$?

Ejercicio 11

Ejercicio 11 – La tarifa del taxi

En una ciudad, la tarifa de un taxi es: 3,50 € de bajada de bandera más 1,10 € por kilómetro durante los primeros 10 km, y 0,90 € por cada kilómetro a partir del kilómetro 10 (la bajada de bandera y los primeros 10 km se cobran siempre).

a. Escribe la función $f(x)$ que da el precio del trayecto en función de los kilómetros x, como función definida a trozos.
b. Calcula el precio de un trayecto de 4 km y de otro de 25 km.
c. Comprueba que la función es continua en $x = 10$.
d. Una persona paga 19 €. ¿Cuántos kilómetros ha recorrido?

Ejercicio 12

Ejercicio 12 – El aparcamiento del centro

Un aparcamiento público cobra según el tiempo t de estancia en minutos: los primeros 30 minutos son gratuitos; entre los 30 y los 120 minutos se pagan 0,04 € por minuto que supere los 30; a partir de los 120 minutos se suman 0,02 € por minuto de más sobre los 3,60 € ya acumulados; y el precio máximo diario es de 8 €.

a. Escribe la función de precio $P(t)$ a trozos, con sus intervalos.
b. Calcula el precio de estancias de 20 min, 90 min, 200 min y 500 min.
c. ¿Cuánto tiempo se ha estacionado si se pagan 5 €?
d. ¿A partir de qué tiempo se paga el máximo de 8 €?

Ejercicio 13

Ejercicio 13 – Dos tarifas de móvil

Dos compañías ofrecen tarifas con datos adicionales. Con la compañía A se pagan 8 € fijos más 3 € por cada GB extra; con la compañía B se pagan 20 € fijos más 1 € por cada GB extra. Llamamos x al número de GB extra consumidos al mes.

a. Escribe las funciones de coste $A(x)$ y $B(x)$.
b. Calcula el coste de ambas para $x = 4$ y para $x = 10$.
c. Halla el consumo para el cual cuestan lo mismo y el coste común.
d. Explica qué compañía conviene a un usuario con poco consumo y cuál a uno con mucho.

Ejercicio 14

Ejercicio 14 – El tiro libre

En un partido de baloncesto, la altura del balón en un tiro libre sigue la parábola $h(x) = -0{,}1x^2 + 0{,}8x + 2$, donde x es la distancia horizontal recorrida (en metros) y h la altura (en metros). La canasta está a 3,05 m de altura.

a. ¿Desde qué altura sale el balón?
b. Calcula la altura máxima y a qué distancia horizontal se alcanza.
c. ¿A qué distancia horizontal caería el balón al suelo si nadie lo toca?
d. El balón pasa por la altura de la canasta dos veces. Calcula las dos distancias; ¿cuál corresponde a la canasta?

Ejercicio 15

Ejercicio 15 – Un ahorro con interés compuesto

Una joven de Zaragoza deposita 5 000 € en un banco que paga un 3 % anual con interés compuesto, de modo que el capital se multiplica por 1,03 cada año. El capital al cabo de t años es $C(t) = 5\,000 \cdot 1{,}03^t$.

a. Calcula $C(0)$, $C(5)$ y $C(10)$ redondeando a céntimos.
b. Explica por qué esta función es exponencial y no lineal.
c. ¿En cuántos años se duplicará el capital? Resuelve $1{,}03^t = 2$ con logaritmos.
d. Halla la función inversa $t(C)$ y úsala para calcular cuánto tarda en llegar a 7 000 €.

Ejercicio 16

Ejercicio 16 – Coste medio de las camisetas

Un taller de Valencia estampa camisetas para equipos deportivos. Tiene unos costes fijos de 500 € y cada camiseta cuesta 8 € de material y mano de obra. El coste medio por camiseta al fabricar x unidades es $M(x) = \dfrac{500 + 8x}{x}$.

a. Calcula $M(50)$, $M(100)$ y $M(500)$.
b. Halla la asíntota horizontal e interpreta su significado.
c. ¿Cuántas camisetas hay que fabricar para que el coste medio no pase de 10 €?
d. Explica por qué el dominio práctico es $x > 0$ y qué ocurre cuando $x \to 0$.

Ejercicio 17

Ejercicio 17 – Tres formas de crecer

Los administradores de tres blogs de recetas comparan las visitas diarias que han tenido durante los primeros t meses. El blog A crece de forma lineal, $A(t) = 100 + 30t$; el blog B, de forma cuadrática, $B(t) = 5t^2 + 50$; y el blog C, de forma exponencial, $C(t) = 40 \cdot 1{,}5^t$.

Mes t	0	2	4	6	8
A (lineal)	100	160	220	280	340
B (cuadrática)	50	70	130	230	370
C (exponencial)	40	90	202,5	455,6	1 025,2

a. Completa una tabla con los valores de las tres funciones para $t = 0,\ 2,\ 4,\ 6,\ 8$.
b. ¿En qué mes supera C a A por primera vez? Razona con valores enteros de t.
c. ¿Cuándo supera B a A?
d. Explica cuál de los tres modelos crece más deprisa a largo plazo y por qué.

Ejercicio 18

Ejercicio 18 – Una parábola transformada

Se considera la función $g(x) = -2(x + 1)^2 + 3$, obtenida a partir de $y = x^2$ mediante varias transformaciones.

a. Describe, en orden, las transformaciones que llevan $y = x^2$ a $y = g(x)$.

b. Indica el vértice, el eje de simetría y el recorrido.
c. Calcula los cortes con los ejes.
d. Desarrolla $g(x)$ y comprueba que $x_v = -\frac{b}{2a} = -1$.

Ejercicio 19

Ejercicio 19 – Las ondas en el estanque

Al lanzar una piedra a un estanque se forma una onda circular cuyo radio crece con el tiempo según $r(t) = 2t$ (metros, con t en segundos). El área del círculo es $A(r) = \pi r^2$.

a. Calcula el radio y el área de la onda a los 3 segundos.
b. Halla la composición $(A \circ r)(t)$, que da el área en función del tiempo.
c. ¿Cuándo tiene la onda un área de 100 m^2? Usa la función inversa.
d. ¿Cuántas veces mayor es el área a los 6 s que a los 3 s? Explica el resultado.

Ejercicio 20

Ejercicio 20 – Desafío: una función que es su propia inversa

Una función es una **involución** si coincide con su inversa, es decir, $f(f(x)) = x$.

a. Halla la inversa de $f(x) = \dfrac{x+3}{x-1}$.
b. Demuestra que $f(f(x)) = x$ y explica qué simetría tiene su gráfica.
c. Demuestra que $f(x) = \dfrac{x+b}{x-1}$ es una involución para cualquier valor de b.